

**Exercice 1.....(5 pts)**

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 3$  et par la relation récurrence  $U_{n+1} = 5U_n - 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

1. Calcule  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$ .
2. On pose pour tout  $n$ ,  $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ .
  - a. Montre que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
  - b. Calcule  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Calcule  $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .

**Exercice 2.....(4 pts)**

1. a. Résous l'équation différentielle  $(E): 16y'' + y = 0$ .
- b. Détermine la solution  $g$  de  $(E)$  vérifiant  $g(0) = 1$  et  $g(2\pi) = -\sqrt{3}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \int_n^{n+1} e^x dx$ .

Montre que  $(U_n)$  est une suite géométrique.

**Problème.....(11 pts)**

Le plan  $P$  est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = x - 1 + \frac{2 \ln 2}{x}$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$ .
  - a. Dresse le tableau de variation de  $g$ .
  - b. En déduis le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. Trouve les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Exprime  $f'(x)$  en fonction de  $g(x)$ . En déduis le tableau de variations de  $f$ .
4. Détermine les asymptotes à la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .
5. Etudie la position de  $(C_f)$  par rapport à la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$ .
6. Trace  $(C_f)$  et  $(D)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .