BAC **1992**

SERIES: MTE-TSEco-STG

Exercice 1 : …………………………………………(5 points)

Soient f et g deux fonctions numérique définies sur ℝ par :

$f(x) = \sin^3 x \quad et \quad g(x) = \cos^3 x$

1°) Linéariser $f(x)$ *et* $g(x)$

2°) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(f(x) + g(x) \right) dx$

Exercice 2 : …………………………………………(5 points)

Soit (U_n) la suite définie sur ℝ-{0 ; 1 ; 2} par $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_2 = 1 \\ U_n = \dfrac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3} \end{cases}$

Soit (W_n) la suite définie par $W_n = U_n - U_{n-1}$ pour tout n $\in$ ℕ-{0 ; 1}.

1°) Calculer W_n en fonction de W_{n-1}.

2°) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme W_2 ; exprimer W_n en fonction de n.

3°) Calculer $S_n = W_2 + W_3 + \ldots + W_n$ en fonction de n.

4°) Calculer S_n en fonction de U_n et de U_1 et en déduire l'expression de U_n en fonction de n.

5°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

<u>Problème</u>: ………………………………………(10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln[(e-1)x+1]$.

1°) Etude et représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2°) Donner une équation cartésienne des tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) de f aux points d'abscisse respectives 0 et 1 ; tracer ces tangentes.

3°) Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble F que l'on précisera. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

4°) On se propose de calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$ par deux méthodes :

a) Calculer I à l'aide d'une intégration par parties
b) Calculer $J = \int_0^1 f^{-1}(y)dy$; retrouver I en montrant que I + J = 1.