

**SERIES:**

MTE-TSEco-STG

**EXERCICE 1 : (4 points)**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  [ par  $f(x) = \ln(e^x - 1)$

1– a) Déterminer la dérivée de  $f$ .

b) En déduire la valeur de l'intégrale :  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ .

2– Soit  $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx$

a) Calculer  $I - K$

b) En déduire la valeur de  $K$ .

**EXERCICE 2 : (6 points)**

1– Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2– On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^3} dx$$

a) Calculer les deux intégrales :  $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$  ;  $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

b) Déterminer trois nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $t$  positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1)$$

c) En posant  $t = e^x$  dans l'égalité (1) calculer l'intégrale  $L = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

3- a) à l'aide d'une intégration par parties exprimer  $J$  en fonction de  $L$ .

b) En déduire la valeur de  $J$ .

### **PROBLEME : (10 points)**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie sur  $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$  par :  $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ . d'unité graphique 2 cm.

1- Prouver que la droite d'équation  $x = \ln 2$  est asymptote verticale à  $(C)$ .

2- a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  ;

b) Justifier que la droite  $(D_1)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ .

3- a) Etablir que pour tout  $x$  différent de  $\ln 2$  on a :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et justifier que la droite  $(D_2)$  d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

4- a) Prouver que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$  on a :  $f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$ .

b) Etudier le signe de  $f'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$ .  
Dresser le tableau de variation de  $f$ .

5- Tracer  $(C)$  et ses asymptotes dans le repère donné.

6- a) Déterminer les primitives sur l'intervalle  $]\ln 2 ; +\infty[$  de la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$

vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$

b) En déduire la primitive sur  $]\ln 2 ; +\infty[$  de la fonction  $g$  prenant la valeur 0 en  $\ln 3$ .