

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$

2. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(2x+1)^3}$

b) $g(x) = (4x^2 - 1) \sqrt{9 - x^2}$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3} dx$

c) $\int_1^2 \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) dx$

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - 1$$

1. Dressez le tableau de variation de f .

2. a) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C_f) de f avec l'axe des abscisses, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur \mathbb{R} .

c) Expliciter la bijection réciproque.

PROBLEME : (10 points)

A

Soit g l'application définie sur \mathbb{R}^+ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1. a) Prouver que $g'(x)$ est du signe de : $x(1+x)(1-x)$ pour tout x de \mathbb{R}^+ .

b) Dresser le tableau de variation de g . En déduire que l'équation : $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

c) Montrer que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. On note (Γ) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2 ; déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_0 du point d'intersection de (T) et de l'axe $x'ox$. On note x_1 et x_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès de x_0 à 10^{-3} près.

b) Préciser le signe de g sur \mathbb{R}^* .

B

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f l'application définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f .

1. Montrer que f est dérivable en 0. Étudier les variations de f .

2. Montrer que pour tout réel x tel que $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire la position relative de (C) et de sa tangente en O. Tracer la courbe (C) .