

Exercice 1 :(5 points)

On considère le polynôme $P(x)$ défini sur \mathbb{R} par

$$P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 31x + 12$$

1-/ Montrer qu'il existe 3 réels a , b et c que l'on déterminera tels que

$$P(x) = (3x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

2-/ Résoudre dans \mathbb{R}

a-/ $P(x) = 0$

b-/ $\ln 6 + \ln(x^3 - x^2 + 2) - \ln(11x^2 + 31x) = 0$

c-/ $6e^x - 17 - 31e^{-x} + 12e^{-2x} = 0$

3-/ Résoudre dans \mathbb{R}^2

$$\text{a-} \begin{cases} e^{x + \ln 2} - e^{y + \ln 3} = 1 \\ e^{x + \ln 3} - e^{y + \ln 2} = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{b-} \begin{cases} xy = e^2 \\ 3\log_x^y + 3\log_y^x = -10 \end{cases}$$

Exercice 2 :(5 points)

1-/ Calculer les intégrales suivantes

$$\text{a-} \int_1^e \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right) dx \quad \text{b-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{\tan x} \right) dx \quad \text{c-} \int_{-1}^1 |x^2 - 2| dx$$

2-/ Pour tout entier non nul n , on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

a-/i-/ Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1; e[$ et que pour tout entier naturel on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

ii-/ En déduire le sens de variation de la suite (I_n)

3-/ i-/ Calculer I_1 .

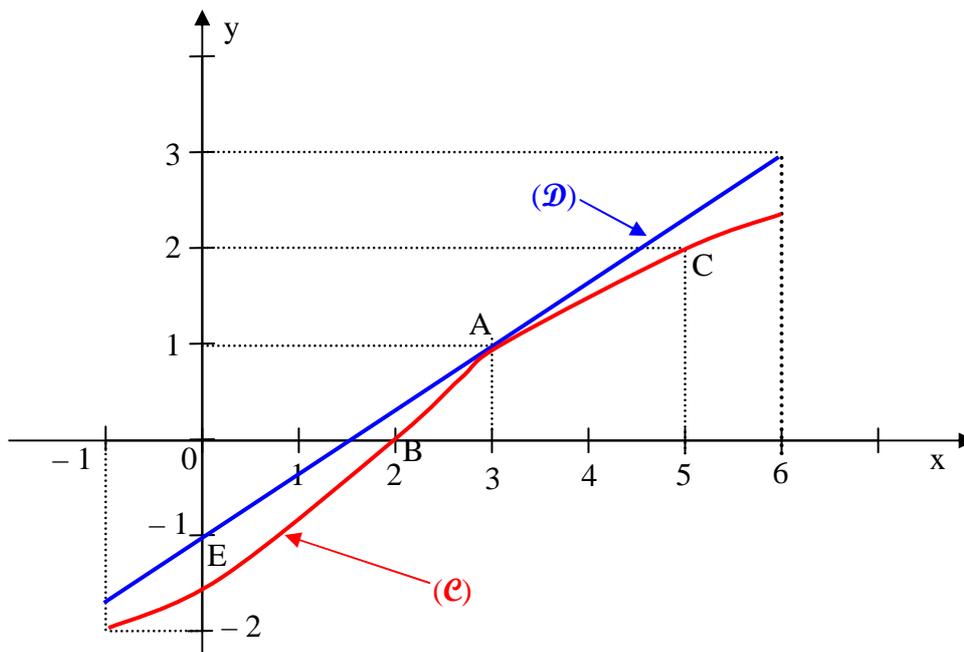
ii-/ Démontrer (en utilisant la méthode d'intégration par parties) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

iii-/ En déduire I_2 ; I_3 et I_4 . Donner les valeurs exactes exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

Problème :(10 points)

Soit f la fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1 ; 6]$; sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ passe par $B(2 ; 0)$ et $C(5 ; 2)$; sa tangente (\mathcal{D}) au point $A(3 ; 1)$ passe par $E(0 ; -1)$. Le graphique ci-dessous donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



Partie I

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

- 1-/ Déterminer l'ensemble I de définition de g .
- 2-/ Quel est le sens de variation de g sur I ? (justifier)
- 3-/ Résoudre dans I l'équation $g(x) = 0$.
- 4-/ Donner une valeur approchée de $g(5)$ à 0,01 près.
- 5-/ Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$. En déduire la valeur de $g'(5)$.
- 6-/ quelle est la limite de g en 2 ? Interpréter.

7-/ En utilisant tous les résultats précédents, donner, dans un repère orthonormal l'allure de la courbe (Γ) représentative de la fonction g ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.

Partie II

P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{1}{2}$.

1-/ Soit $\mathcal{C}' = S(\mathcal{C})$ (image de \mathcal{C} par S).

Construire (\mathcal{C}') dans le même repère que (\mathcal{C}) .

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction admettant (\mathcal{C}') comme courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Vérifier que $g(x) = (x+1) \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$ et préciser Dg , ensemble de définition de g .

2-/ Résoudre algébriquement dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie III

1-/ justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < 1 < g(n)$.

En déduire l'encadrement suivant de e : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Préciser cet encadrement si $n = 1$.

Soit $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire que

$$\ell(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell(n)$ est minoré par $\frac{2}{n}$.

2-/ Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire que

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| \leq 10^{-3}.$$