EXERCICE 1 : (4 points)

On considère l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

1-/ Calculer les dérivées des fonctions f et g définies sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} \qquad et \qquad g(x) = \sqrt{1+x}$$

2-/ Vérifier que :

$$J = 2\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} - \int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$$

3-/ Calculer J.

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit la suite numérique (U_n) définie pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ par
$U_1 = 1$ et $U_{n+1} = aU_n + bn + c$, où a, b, et c désignent trois coefficients réels.

1-/ Calculer a, b, et c sachant que $U_2 = 3$, $U_3 = 4$, $U_4 = 3$.

2-/ On suppose que $U_{n+1} = 2U_n - 3n + 4$

a) Soit la suite numérique (V_n) définie pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$par $V_n = U_n - 3n + 1$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Calculer V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n et calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème : (10 points)

Partie A :

On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)\, e^{-x} - 1$.

1-/ a-/ Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b-/ Calculer la dérivée g' de la fonction g et dresser son tableau de variation.

c-/ Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2-/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\, e^{-x} - x + 4$.
On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

a-/ Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b-/ Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
Etudier le signe de $f(x) - y$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

c-/ Calculer la dérivée f' de la fonction f.

d-/ Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variation de f en utilisant le signe de $g(x)$ établi dans la question **c-/** de **1-/.**

3-/a-/ A l'aide du tableau des variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
b-/ Donner un encadrement à 10^{-1} près de chacune des solutions.
4-/ Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite Δ et les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses : –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 (on indiquera le coefficient directeur).

Partie B :

La fonction f modélise la demande d'un produit, x étant la quantité demandée, de 0 à 4 milliers de tonnes, et $f(x)$ le prix en francs de ce produit au kg.

1-/ Justifier que pour $x \in [0 ; 4]$, $f(x)$ est positif.

2-/ La fonction d'offre de ce même produit est définie sur [0 ; 4] par
$h(x) = 0{,}5\, x + 2$, où x est la quantité et $h(x)$ le prix en francs.

Construire sa représentation graphique $\mathcal{D}$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

Lire graphiquement le prix d'équilibre du marché et la quantité échangée à ce prix (on donnera des valeurs approchées à 0,1 près).