SÉRIES: MTE -TSEco-STG

SUJET

Exercice 1 .... (4 pts)

1-/ Développer le polynôme

$$P(X) = (X + 1)(X - 2)$$

2-/ On désigne par $\ln(x)$ le logarithme népérien de x. En utilisant le résultat précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a-/ $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 2 = 0$;

b-/ $e^{2x} - e^{x} = 2$;

Exercice 2 .... (6 pts)

Dans une zone de marais, on s'intéresse à la population de libellules. On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n)$$

On pose $P_0 = 40\ 000$ et $P_1 = 60\ 000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par

$P_n - P_{n-1}$.

1./ Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année et la troisième année.

En déduire P_2 et P_3.

TSVP ☛

2./ On considère les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel, par :

$U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2} P_n$

a./ Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer U_n en fonction de n.

b./ Calculer $V_{n+1} - V_n$ et en déduire que, pour tout entier naturel n :

$$V_n = P_1 - \frac{1}{2} P_0$$

c./ Calculer alors V_n.

d./ Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.

En déduire une expression de P_n en fonction de n.

e./ Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Problème...(10 pts)

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur]-1 ; +∞[par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$$

1°/ Démontrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

où a, b et c sont 3 réels que l'on déterminera.

2°/ Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

a-/ Démontrer que pour tout x appartenant au domaine de définition,

$$f\,'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$$

b-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3°/ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 4cm)

a-/ Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote parallèle à l'axe (O ; $\vec{j}$).

b-/) Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote (Δ) (dont on précisera l'équation) non parallèle aux axes.

c-/Démontrer qu'il existe un point A de ($\mathcal{C}$) où la tangente (T) est parallèle à (Δ)

d-/ Tracer (Δ), (T) et ($\mathcal{C}$) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) (On précisera en particulier les points d'abscisses respectives : $-\frac{1}{2}$, 1 et 2.

4°/ Calculer l'aire S de la partie du plan comprise entre la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

Donner une valeur approchée de cette aire à 1cm^2 près.