BAC **1997**

SERIES: MTE-TSEco-STG

EXERCICE 1 : (6 points)

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit de prix unitaire x telles que : $f(x) = e^x - 10$ et $g(x) = 9e^{-x}$.
On appelle intervalle de validité du modèle, l'intervalle I des nombres réels x tels que : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est appelée prix d'équilibre.
Le nombre $E = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ s'appelle élasticité de l'offre par rapport au prix x.
Déterminer pour cette étude de marché

a) L'intervalle I de validité du modèle
b) Le prix d'équilibre
c) L'élasticité de l'offre par rapport au prix x.

EXERCICE 2 : (3 points)

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat.
Dans les deux cas le loyer annuel initial est de 24.000 F et le locataire s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

1– Contrat N°1 :
Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer U_1 Payé lors de la deuxième année ;
b) Exprimer U_n, loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année, en fonction de n. Calculer U_8
c) Calculer la somme payée à l'issue des neufs années de contrat.

2– Contrat N°2 :
Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 1500 F du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer V_1 payé lors de la deuxième année.
b) Exprimer V_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année), en fonction de n. calculer V_8.

c) Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.
Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

<u>PROBLEME</u> : (11 points)

1°) Soit l'application P définie sur par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

a) Vérifier que $P(1) = 0$; puis factoriser $P(x)$.

b) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) Soit la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

a) Déterminer la dérivée $g'(x)$.Utiliser 1°) pour donner le sens de variation de g.

b) Déduire de a) le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3°) Soit la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan, d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x^2} = 0$ .En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

c) Démontrer que la fonction h telle que : $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur]0; +∞[et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

En déduire que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant :

$\alpha + \ln\alpha = 0$. Démontrer que $0{,}56 \le \alpha \le 0{,}57$.

d) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ).

e) Etudier le sens de variation de f . En déduire l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$. Démontrer que : $0{,}46 < \beta < 0{,}47$.

f) Construire (C).