SÉRIE: T.S.Exp **SESSION : Juin 2018**

Exercice 1………………………………………………………………………..(5 points)

I- On considère la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i.$$

1) Vérifie que $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(z)=0$.

3) Ecris les solutions sous forme algébrique.

II- Détermine la nature des transformations suivantes :

1) $z'=z+1-2i$;

2) $z'=iz+1$;

3) $z'=3z-1+i$;

4) $z'=(1+i)z-1+i$.

Exercice 2………………………………………………………….………………..(5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. Calcule u_1 et u_2.
2. a) Démontre que pour tout entier naturel non nul n, $0<Un<1$

   b) Démontre que la suite u_n est croissante.

   c) Que pouvez-vous en déduire ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}.$$

   a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Calcule, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   c) Démontre que la suite u_n est convergente et détermine sa limite.

Problème………………………………………………………….………………..(10 points)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1;26]$ par : $f(t)=24t\ln(t)-3t^2+10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. Calcule $f'(t)$.
2. a. Etudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1;26]$.

   b. Dresse le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[1;26]$.

   c. Montre que l'équation $f'(t)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1;26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.

   d. En déduis le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1;26]$ puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;26]$.

3. On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

   a. Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction déviée f' obtenu à la question 2.

   b. En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.