

**Exercice 1.....(6 pts)**

On se propose de résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation

$$(E) : z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0.$$

- Détermine le réel  $y$  tel que  $iy$  soit une solution de  $(E)$ .
- Détermine les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :  
 $z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$ .
- Achève la résolution de  $(E)$  puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

**Exercice 2.....(6 pts)**

On considère la suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $U_n = e^{2n-1}$ .

- Calcule  $U_0, U_1, U_2, U_3$  et  $U_{n+1}$ .
  - Démontre que  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
  - Exprime en fonction de  $n$  la somme  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .
  - Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
  - Trouve la valeur minimum de  $n$  telle que  $S_n \geq 10$ .
- Soit la suite  $(V_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$ . On pose  $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ .  
 Exprime le produit  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$  en fonction de  $T_n$ .

**Problème.....(8 pts)**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]-\infty; +\infty[$  par  $f : x \mapsto f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$  et on note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique  $2cm$ .

- Calcule les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- Démontre que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$  puis précise la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$ .
- Etudie les variations de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .
  - Calcule  $f'(1)$  puis en déduis le signe de  $f'(x)$  sur  $]-\infty; +\infty[$ .

c. Dresse le tableau de variations de  $f$ .

4. Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $1,9 < \alpha < 2$  et  $-0,6 < \beta < -0,5$ .

5. Calcule la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $+\infty$  puis en donne une interprétation géométrique.

6. Trace  $(C_f)$  et  $(\Delta)$ .