EXAMEN : ***BAC*** **1991**

SERIE SET Mathématiques Composition

A/ L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur IR. Soit B = (1 ; i) la base constituée des nombres complexes 1 et i.
On dira que le complexe z = x + yi est le vecteur de coordonnées (x ; y) dans la base (1 ; i).Si les couples (x ;y) et (x';y') sont les coordonnées de deux vecteurs de cet espace, le produit scalaire sera xx' + yy'. Soit a un réel donné et f_a l'application linéaire de C dans C de matrice.

$$M = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{dans la base B.}$$

On pose $f_a(z) = Z = X + Yi$ avec z = x +yi ; (x, y, X et Y' réels).

I/-
1°/ Quelles sont les coordonnées de Z dans la base B ?

2°/ Exprimer en fonction de x et y puis en fonction de z et $\bar{z}$ où $\bar{z}$ = x – yi.

3°/ Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ invariants par f_a ? Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

4°/ Pour quelles valeurs de a f_a est elle une rotation vectorielle ?

II/
1°/ Montrer que $\forall a \in$ IR, f_a est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit f_a^{-1} l'application réciproque de f_a. On pose f_a^{-1}(z) = Z' = X'+Y'i.
2°/ Déterminer dans la base B la matrice de f_a^{-1}.
3°/ Soit z = x + yi un élément de $\mathbb{C}$. Exprimer Z' = f_a^{-1}(z) en fonction de x et y puis en fonction de z et $\bar{z}$. Déterminer une relation entre Z, Z' et z.
En déduire que $f_a + f_a^{-1} = 2aI_C$ où I_C est l'application identique de $\mathbb{C}$. $f_a - f_0$.
4°/ Si a $\neq 0$, déterminer le noyau et l'image de f_a.

B/ Soit $\mathscr{P}$ un plan affine associé au plan vectoriel $\mathbb{C}$ et rapporté à un repère orthonormé d'origine O et de base B. On désigne par φ_a l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point O associe le point A(1 ; a) où a est un réel et dont l'application linéaire associée est fa. L'image par φ_a d'un point N est alors
φ_a (N) = N'.

I/-1°/ Déterminer les coordonnées x' et y' de N' en fonction des coordonnées x et y de N.
2°/ Démontrer que si a ≠ 1 alors admet un unique point invariant Ω_a dont on déterminera les coordonnées. Si a = 1, quel est l'ensemble des points invariants ?
3°/ Etablir que φ_a est la composée d'une application affine de point invariant O et d'une translation.
4°/ Quelle est l'image par de la droite d'équation x = 0 et de la droite affine d'équation y = 2ax.

II/ On pose a = 0. Montrer que φ_0 est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
Quelle est l'image par φ_0 du cercle de centre O et de rayon 1 ? Quelles sont les images par φ_0 des bissectrices des axes du repère ?

III/ On pose a = 1.

1°/ Exprimer y' – x' en fonction de y – x. En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par φ_1

2°/ On considère la fonction numérique f définie de IR vers IR par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Etudier la fonction f, construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans le plan muni du repère (O ; B). Déterminer une équation de ($\mathcal{C}$') transformée de ($\mathcal{C}$) par φ_1.
Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme $x = y - \frac{1}{y}$. Construire ($\mathcal{C}$') sur le même repère que ($\mathcal{C}$) (On pourra au préalable étudier et représenter la fonction $g : x \mapsto y = x - \frac{1}{x}$. on déduira la courbe ($\mathcal{C}$') de la courbe de la fonction g

IV/ 1°/ On pose a ≠ 0, soit T_1 l'application de P dans P qui au point O associe le point A(1, a) et dont l'endomorphisme associé est $f_a + f_a^{-1} = u$. Démontrer que T_1 est une homothétie T_{-1} une translation.
2°/ On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$ Soit T_2 l'application affine de P dans P d'endomorphisme associé $f_a - f_0$. telle que $T_2(O)$ = A(1 ; 0).
Démontrer que T_2 est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.

EXAMEN : *BAC* **1991**

SERIES MTI-MTGC Mathématiques Composition

A/ Soit la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$.

1°) Étudier la fonction g et construire sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité = 2cm).

On déterminera l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

2°) Déterminer de l'étude de g le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

B/ On considère la fonction f de la variable réelle x définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x-1} - 1 \quad si \quad x < 1 \\ f(x) = (x-1)\ln x \; si \quad x > 1 \end{cases}$$

1°) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2°) La fonction f est-elle continue en $x = 1$?

Étudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

3°) La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?

Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

4°) Étudier le sens de variation de f et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer la courbe représentative (Γ) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

C/-Calcul d'aire.

1°) En effectuant une intégration par partie, déterminer sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ l'ensemble des primitives de $h(x) = (x-1)\ln x$.

2°) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1 \quad et \quad x = 3$.

D/-Soit α un réel négatif.

1°) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ), et les droites d'équations $x = \alpha \;\; ; x = 3 \;\; et \;\; y = -1$ en fonction de α.

2°) Déterminer la limite de cette aire lorsque α tend vers $-\infty$.

E/-1°) Montrer que f est une bijection de IR sur un ensemble que l'on précisera.

2°) On désigne par (Γ'), la courbe représentative de f^{-1}, construire (Γ') sur le même graphique que (Γ').

Barème : A=4pts ; B=7pts ; C=3pts ; D=3pts ; E=3pts.