

A- On se place dans l'ensemble F des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition et de la multiplication par un réel.

I- Soient f_1 et f_2 les deux éléments de F définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ et } f_2(x) = e^x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Soit $E = \{ f \in F / f = af_1 + bf_2, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

1°) a) Démontrer que E est un sous espace vectoriel I de F

b) Démontrer que $B = (f_1 ; f_2)$ est une base de E.

2°) a) Montrer que la dérivée de tout élément de E est un élément de E

b) Montrer alors que d, application de E dans E, qui, à tout élément f de E associe $d(f) = f'$ (sa fonction dérivée) est un endomorphisme de E.

Donner la matrice de f dans la base $(f_1 ; f_2)$.

c) Vérifier que d est une bijection de E dans E. Ecrire la matrice de d^{-1} , bijection réciproque de d dans la base B. En déduire une primitive d'un élément quelconque de E.

II- 1°) Soit φ l'application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , telle que :

$$\forall (f, g) \in E \times E, \varphi(f, g) = \int_0^2 e^{-2x} f(x).g(x) dx$$

a) Calculer $\varphi(f_1, f_1)$; $\varphi(f_2, f_2)$; $\varphi(f_1, f_2)$

b) Ecrire $\varphi(f, g)$ en fonction des coordonnées de f dans la base \mathcal{B} , ainsi que : $\varphi(f, f)$.

Dans la suite du problème on admet que φ définit un produit scalaire sur E et on note : $\varphi(f, g) = f \cdot g$ (on lit f scalaire g).

c) Vérifier que \mathcal{B} est une Base orthonormée de E.

2°) E muni de φ est un plan vectoriel euclidien et \mathcal{B} est une base orthonormée directe. Démontrer qu'il existe une rotation r telle que $d = h \circ r = r \circ h$ où h est

l'homothétie vectorielle de rapport $\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$. Si α est une mesure en radians de

l'angle de r, vérifier que $\alpha \in] -\frac{\pi}{2} ; 0 [$.

3°) En déduire que pour toute application f de E, de coordonnées (a, b) dans la base B, $\forall x \in \mathbb{R} ; f''(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \cdot e^x [a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right) + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right)]$ où α est une mesure de l'angle de r.

B- Etude de $f_1 : x \mapsto e^x \cos \frac{\pi}{2} x$.

Soit (\mathcal{C}) la courbe de f_1 , (Γ) la courbe d'équation $y = e^x$ et (Γ') la courbe d'équation : $y = -e^x$.

I - 1°/c a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : -e^x \leq f_1(x) \leq e^x$.

b) Calculer les abscisses des points d'intersection de (Γ) et (\mathcal{C}) . Vérifier qu'en chacun de ces points, (Γ) et (\mathcal{C}) ont la même tangente.

c) Faire la même étude pour (Γ') et (\mathcal{C}) .

2°/ Calculer les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe $(O ; \vec{i})$.

II - 1°/ En utilisant le résultat de la partie A, II, 3°), montrer que :

$$f_1'(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \cdot e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right).$$

2°/ Etudier f_1 sur l'intervalle $[-1, 3]$, pour cela :

a) Montrer qu'il existe deux valeurs de x (fonction de α) annulant f_1' dans l'intervalle $[-1, 3]$. Etudier le signe de f_1' sur $[-1, 3]$.

On pourra par exemple utiliser des résultats connus sur le signe de $\cos x$ avec x appartenant à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ou $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, ou bien en utilisant la continuité de f_1' , déduire son signe sur un intervalle convenablement choisi du signe de f_1' en un point de cet intervalle.

3°/ En utilisant un repère orthogonal non normé $(O ; \vec{i}, \vec{j}) : (\|\vec{i}\| = 4 \|\vec{j}\|)$, représenter les courbes (Γ) , (Γ') et (\mathcal{C}) .

On placera les points calculés dans les questions I, II partie B] et calculera en outre les images par f_1 des autres valeurs entières de $[-1, 3]$.

NB : $e = 2,7 ; e^2 = 7,4 ; \frac{2\alpha}{\pi} \approx -0,65 ; f\left(\frac{2\alpha}{\pi} + 1\right) \approx 1,2 ; f\left(\frac{2\alpha}{\pi} + 3\right) \approx -9$

On ne cherchera pas à expliciter α , utiliser les valeurs données.