

A/ Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On pose $I = M_{0,1}$; $J = M_{1,0}$.

1°/ Montrer que E est un sous espace vectoriel de base (I ; J) de l'espace vectoriel sur IR des matrices carrées d'ordre deux.

2°/ Calculer J^2 . En déduire que si $M \in E$ et $M' \in E$ alors $M.M' \in E$. Montrer que $(E ; + ; \bullet)$ est un anneau commutatif unitaire.

3°/ Quelles sont les matrices $M_{a,b}$ inversibles dans E ? Exprimer alors $M_{a,b}^{-1}$ dans la base (I ; J)

B/ Dans ce qui suit $b = 0$

Soit V un plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$. Soit P un plan affine euclidien d'espace vectoriel associé V ; P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f_a l'application de P dans P dont l'endomorphisme associé a pour matrice $M_{a,0}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$, et qui, au point O fait correspondre le point $O'(0 ; a + 3)$.

1°/ Déterminer analytiquement f_a .

2°/ Pour quelles valeurs de a f_a est elle une bijection ? Déterminer analytiquement sa bijection réciproque lorsqu'elle existe.

3°/ Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble D des points invariants par f_a .

4°/ Démontrer que seule l'application f_1 est une involution que l'on caractérisera.

5°/ f_a est - elle une isométrie ?

6°/ Soit α un réel strictement positif. Soit G le barycentre des points $A(\alpha ; \alpha)$; $B(\alpha ; 2)$;

$C(\alpha ; -\frac{2 \ln \alpha}{\alpha})$ affectés respectivement des coefficients 1, 2, -1. Trouver les coordonnées de G,

en déduire la courbe décrite par G quand α varie.

7°/ Soient A_1, B_1, C_1 les images des points A, B, C par l'application f_1 (définie en B/4°).

Soit G_1 le barycentre du système $\{(A_1, 1) ; (B_1, 2) ; (C_1, -1)\}$.

Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par G_1 lorsque α varie.

C°/ Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction numérique g définie sur \mathbb{R}_+^*

par : $g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$.

1°/ On considère la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto h(x) = x^2 - 2 \ln x + 2$.

Etudier les variations de h et préciser le signe de h(x). (On ne demande pas de tracer sa courbe)

2°/ Etudier les variations de la fonction g. Montrer que la courbe (\mathcal{C}) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que (\mathcal{C}) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera.

Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

3°/ Soit (\mathcal{C}_1) la transformation de (\mathcal{C}) par f_1 (définie en B-4°/)

a) Ecrire une équation de (\mathcal{C}_1) .

b) Montrer que (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) ont les mêmes droites asymptotes. Tracer (\mathcal{C}_1) dans le même

c) repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$. que (\mathcal{C}) sans étudier g_1 .

4°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = m$ ($m > 1$) et les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) .

SESSION DE JUIN 1984

SÉRIES : S.E.T – MTI – MTGC ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES (Connaissance)

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique de Bamako

m étant un réel, soit f_m l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie pour tout réel x par

$f_m(x) = (x + m)e^{-x}$ et (\mathcal{C}_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

A/ 1) Étudier les variations de f_m . Préciser les points d'inflexion et les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_m) .

2) Montrer que les valeurs qui annulent f_m , f'_m et f''_m forment une progression arithmétique. Soit H_m le point de (\mathcal{C}_m) où la tangente est parallèle à la droite $(0; \vec{i})$. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points H_m quand m décrit \mathbb{R} .

3) Écrire une équation cartésienne D_m en un point quelconque $M_0(x_0; f_m(x_0))$ appartenant à (\mathcal{C}_m) . Montrer que pour x_0 fixé et m décrivant \mathbb{R} , toutes les droites D_m ont en commun un point T dont les coordonnées ne dépendent pas de m .

B/ 1) Étudier le signe de $f_{m+1}(x) - f_m(x)$. Préciser la position relative des courbes (\mathcal{C}_0) , (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

On pourra utiliser les valeurs numériques approchées suivantes.

x	-1	1/2	1	2
e^{-x}	2,72	0,60	0,37	0,14

Construire les tangentes aux courbes (\mathcal{C}_0) , (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) aux points d'abscisses 0 et 1.

2) Soit α un réel tel que $-m < \alpha$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $\begin{cases} -m \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f_m(x) \end{cases}$ $A(\alpha)$ a-t-elle une limite lorsque α tend vers $+\infty$? Si oui calculer cette limite.

C/ 1) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel non nul n que la dérivée d'ordre n de la fonction f existe et est donnée par la relation $f_m^{(n)}(x) = (-1)^n f_{m-n}(x)$

2) λ étant un réel fixé, on pose $U_0 = f_m(\lambda)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = f_m^{(n)}(\lambda)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} + U_n = (-1)^{n-1} e^{-\lambda}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de λ , la somme $S_{2p-1} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2p-1}$.

En déduire la somme $S_{2p} = \sum_{i=0}^{2p} U_i$. Montrer que $S_{2p} = f_{m-p}(\lambda)$.

3) Calculer la somme $F_{2p} = U_0 + U_2 + \dots + U_{2p} = \sum_{i=0}^p U_{2i}$. Montrer que $F_{2p} = (p+1)S_{2p}$.