SESSION DE JUIN 1986

SÉRIES : S.E.T- M.T.I - M.T.G.C EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES (connaissance)

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions $f_\lambda$ définies par :

$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1+\lambda x)$ où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

**I-** On recherche le nombre de points d'intersection de la courbe représentative $C_\lambda$ de $f_\lambda$ dans un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ avec la droite ( D ) d'équation y= x .

1-Donner l'ensemble de définition de $f_\lambda$ ( on distinguera les deux cas : $\lambda \geq 0$ et $\lambda < 0$ )

2-On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

a) On suppose $\lambda < 0$. Etudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition .

En déduire le nombre de points d'intersection de $C_\lambda$ et (D) .

b) On suppose $\lambda \succ 0$. Etudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition ( on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer les limites à l'infini).

Etablir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$ quand x décrit l'ensemble de définition de $\varphi_\lambda$ est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln\lambda$.

c) Etudier quand $\lambda$ décrit $]0,+\infty[$ les variations de $m(\lambda)$ ; en déduire son signe .

d) Combien , lorsque $\lambda > 0$ , $C_\lambda$ et ( D) ont- telles de points communs ?

1-a) Comparez $f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(-x)$.

Existe-il un lien entre les deux courbes $C_\lambda \, et \, C_{-\lambda}$ ?.

b)Soit $\Gamma$ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

Trouver , lorsque $\lambda \succ 0$ une translation qui transforme $\Gamma$ en $C_\lambda$.

c) Représenter dans un même repère orthonormé ( on prendra comme unité 3cm) les courbes $(\Gamma), C_2, C_{-2} \, et (D)$.

**II-** Calcul d'une valeur approchée de l'abscisse des points d'intersection de la courbe $C_\lambda$ avec la droite ( D) dans le cas particulier $\lambda = 1$.

Soit le plan affine euclidien P muni du repère orthonormé R= $\{o,(i,j)\}$ et soit $\vec{P}$ le plan vectoriel associé muni de la base orthonormée directe B= $\{i,j\}$ ( avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ =1cm ) .

I –Soit le point $\Omega(1,1)$ du plan $\mathscr{P}$ et les vecteurs :

$\vec{I} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$ du plan $\vec{P}$. Soit le repère r = ($\Omega$ , $\vec{I}$ , $\vec{J}$ ) du plan .Un point M sera repéré par ses coordonnées x et y dans R et X et Y dans r . Soit ($\mathcal{C}$) la courbe d'équation XY= $\frac{3}{4}$ dans le repère r .

1-Reconnaître la nature de ($\mathcal{C}$) .

2- Etablir les relations entre x, y ,X et Y. Montrer qu'une équation de ($\mathcal{C}$) dans le repère R est :

$$( x - 1)(4y - 3x - 1) = 12.$$

Mettre cette équation sous la forme y =f(x ) où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à déterminer .

3- Etudier les variations de la fonction f et construire ($\mathcal{C}$) .

4- Calculer l'aire en cm$^2$ de la partie (D) du plan P définie dans le repère r par :

$$\left\{ M(X,Y) / \frac{1}{2} \le X \le 1 \ \ et \ \ 0 \le Y \le \frac{3}{4X} \right\}$$ on donne $\ln 2 \cong 0{,}69$.

II- Soit h l'application affine de P dans P qui au point M(x, y) associe le point M'( x', y' ) dans le repère R par les relations :

$$\begin{cases} 5x' = 3x - 4y + 6 \\ 5y' = -4x - 3y + 12 \end{cases}$$

1-Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme associé φ de h .

Quelle est la nature de φ ?

2- Montrer que l'ensemble des points invariants par h est une droite (d) dont on donnera une équation.

Déduire des résultats précédents la nature de h dans R .

3- Déterminer l'image du point $\Omega$ par h puis exprimer φ ( $\vec{I}$ ) et φ ( $\vec{J}$ ) en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$ .

En déduire l'expression de h dans le repère r sous la forme :

$$\begin{cases} X' = aX + bY + c \\ Y' = a'X + b'Y + c' \end{cases}$$ où a , b , c , a' , b', c' sont des réels à déterminer .

Retrouver ce résultat d'une autre manière .Quelle est la nature de h dans le repère r ?

4-a) Montrer que la droite (Δ) d'équation Y =5X dans le repère r est globalement invariante par h .

b) Montrer que la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est globalement invariante par h .

III/ 1-Déterminer dans R un vecteur unitaire $\vec{k}$ de ( Δ ) dont les coordonnées seront positives Soit $\rho$ la rotation vectorielle du plan vectorielle $\vec{P}$ tel que $\rho(\vec{k}) = \vec{i}$ et soit g la rotation du plan affine P de centre $\Omega$ et d'endomorphisme associé $\rho$ .

2- Déterminer la matrice de $\rho$ dans la base $\mathscr{B}$ .

3- Soit M (x,y) et M' (x',y' )deux points dans le repère R tels que g(M) = M' . Déterminer x' et y' en fonction de x et y . En déduire X et Y en fonction X'et Y'.

4- Déterminer par son équation dans R l'image ( $\mathcal{C}$' ) de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) par g (on aura intérêt à passer par l'intermédiaire du repère r).

a) Quelle est la nature de la courbe ( $\mathcal{C}$ ') , en donner les éléments caractéristiques .

b) Retrouver les éléments caractéristiques de la courbe ( $\mathcal{C}$ ).