EXERCICE I : (3 points)

Soit **a** un nombre réel vérifiant $0 < \mathbf{a} < \pi$. On considère l'équation en z :

$$(E) : z^2 \sin^2 a - 4z \sin a + 4(1 + \cos^2 a) = 0 .$$

1°) Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) .

2°) On désigne M ' et M'' les images des racines z' et z'' de (E) dans le plan complexe. Montrer que lorsque **a** vari dans $]0,\pi[$ M' et M'' est une branche d'une hyperbole ($\mathcal{H}$) dont on précisera les sommets les asymptotes et dont on donnera une représentation graphique.

EXERCICE II : (3points)

Un jouer dispose de 3 dés qu'il lance simultanément. Leurs faces numérotées de 1 à 6. il ne les lance qu'une fois. Son gain est ainsi attribué.

- Si les trois chiffres sortis sont égaux il gagne 5F
- Si parmi les trois chiffres il y a deux « 1 » et deux seulement il gagne 2F.
- Si les trois chiffres sont consécutifs alors il gagne 1F.
- Dans tous les autres cas son gain est nul.

1°) Etablir la loi de probabilité de x.

2°) Déterminer et représenter graphiquement la fonc tion de répartition de x.

3°) Calculer l'espérance mathématique de x.

EXERCICE III : (5points)

$\mathcal{P}$ est un plan affine orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L point de coordonnées (x ; y) admet pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M'= f(M) dont l'affixe z' est défini par :

$Z' = (1 - i\sqrt{3})(\frac{1}{2}\bar{z} - 1)$ et $Z = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\bar{z} - i(1 - \sqrt{3})$.

1°) quelle est la nature de l'application f ?

2°) Déterminer l'application $f \circ f$. En déduire l'application réciproque f^{-1}.

3°) Montrer que f est la composée d'une symétrie orthogonale (dont on précisera l'axe) et d'une translation (dont on précisera le vecteur).

EXERCICE IV : (4points)

Etudier les variations de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 2x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Trouver les asymptotes, construire la courbe ($\mathcal{C}$) de g et les tangentes aux points particuliers.

EXERCICE V : (3points)

On considère une suite de terme général U_n, à valeurs réelles, définie par son premier terme U_0 et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par la relation : $U_n = 3U_{n-1} + 2$

Soit a un nombre réel ; pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + a$.

1°) Calculer a pour que la suite de terme général V_n soit une suite géométrique de raison q. En déduire U_n en fonction de U_0 et n. Peut-on choisir U_0 de façon que pour

tout n de $\mathbb{N}$ on ait : $U_n = V_0$?

2°) On suppose **a = 1** et $U_0 = 1$. Calculer, en fonction de n la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

Quel est le plus petit entier n tel que S_n soit supérieur à 10^4 ?

EXERCICE VI : (2points)

Calculer : $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$.

On considère un plan affine $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Dans les représentations graphiques on prendra 2cm pour unité de longueur. On désigne par (E_m) l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x ; y) vérifient la relation :

$y^2 = m\,(x^2 - 1) + 2x$, où m est un paramètre réel.

1°/ a) Soit f la fonction qui, au réel x, associe lorsqu'il existe, le réel $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.
Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan $\mathscr{P}$.
Vérifier que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Montrer que l'ensemble (E_1) correspondant à $m = 1$ est la réunion de $(\mathscr{C})$ et d'une courbe $(\mathscr{C}')$ dont on donnera l'équation dans le repère $(O\,;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
Construire (E_1) et montrer que le pont I (–1 ; 0) est un centre de symétrie pour (E_1).
2°/ a) On considère l'ensemble (E_{-1}) correspondant à $m = -1$.
Quelle est la nature de cet ensemble ? La construire dans le plan $\mathscr{P}$.
b) On associe aux points M(x ;y) et M'(x' ; y') les nombres complexes z= x+iy et z'= x' +iy', appelés affixes de M et de M'. On considère l'application T de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M (x ;y) associe le point M'(x' ; y') défini par z' = az+b, où a et b sont deux nombres complexes que l'on déterminera sachant que le point I (0 , 1) est invariant par T et que l'ensemble E_1 précédent est transformé par T en le cercle de centre O et de rayon 1.
On caractérisera alors l'application T.
c) a et b ayant les valeurs précédemment trouvées, calculer x' et y' en fonction de x et de y. En déduire l'équation de E'_1 transformée de E_1 par l'application T. Préciser la nature de E'_1. Démontrer qu'aucun point de E'_1 n'a pour coordonnées un couple d'entiers relatifs.
3°/ a) Montrer que quelque soit le réel m, l'ensemble (E_m) passe par deux points fixes, A et B dont on donnera les coordonnées. Ecrire les équations des tangentes à E_m en ces points A et B.
b) Démontrer que l'ensemble E_0 correspondant à $m=0$, et lui seul, admet en A et B des tangentes dont les coefficients directeurs valent respectivement $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Construire E_0.
Calculer l'aire de la portion du plan $\mathscr{P}$ limitée par E_0 et la droite d'équation x = 1.
c) Sur la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$, on prend un point N d'ordonnée λ ($\lambda \in \mathbb{R}$).Soit (Δ) la droite passant par le point $N(-\frac{1}{2}\,;\ \lambda)$ et de coefficient directeur t, (t réel donné). Quelle relation nécessaire et suffisante doit-elle exister entre t et λ pour que (Δ) soit tangente à E_0 ?
En déduire que par tout point N de D, on peut mener deux tangentes à E_0 qui sont perpendiculaires.
4°/ Montrer que quel que soit le réel non nul m, l'ensemble E_m admet le point $(-\frac{1}{4}\,;\ 0)$ pour centre de symétrie. Quel est l'ensemble (R_1) des valeurs de m pour les quelles l'ensemble (E_m) est une éllipse? Exprimer alors, en fonction du réel m de R_1, la longueur de axes de l'ellipse (E_m) et préciser les supports du grand axe et du petit axe.

Barème : 1° / 4pts ; 2°/ 6pts ; 3°/ 6pts ; 4°/ 4pts.