SERIES: SET– MTI – MTGC

EXERCICE 1 : (6 points)

1). Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$Z_1 = -2(\sin x + i\cos x) \quad ; \quad Z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i} \quad ; \quad Z_3 = \frac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x}$$

2). Déterminer les suites d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.

3). Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesures respectivement 30m et 21m ; les deux autres côtés mesurent 18m et 12m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?
b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

EXERCICE 2 : (4points)

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien ; A, B, C et D quatre points de $\mathscr{P}$ deux à deux distincts.
a) Montrer que ABCD est un parallélogramme si seulement si D est le barycentre du système $\{(A,1):(B,-1);(C,1)\}$. Déterminer l'ensemble **(S**) des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD.$$

b) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de $\mathscr{P}$ tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$. Trouver la solution particulière f dont la courbe représentative **($\mathcal{C}$)** admet au point A (0 ; 1) une tangente parallèle à la droite d'équation : $3x + y - 2 = 0$.
Quelles sont les coordonnées de l'extremum de **($\mathcal{C}$)** ?

PROBLÈME (10points)

Partie I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f; étudier sa continuité et sa dérivabilité en énonçant le théorème utilisé.

2. a) Etudier la dérivabilité de f' fonction dérivée de f, et en déduire les variations de f'.

b). Soit F la restriction de f' à l'intervalle I =] –1 ; 0]. Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduire que dans I l'équation f' (x) = 0 admet une solution unique notée α. On ne cherchera pas à calculer α, mais on montrera que $\alpha > \frac{-1}{2}$.

c) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

d) Des résultats précédents, déduire le signe de f' (x) pour x ε Df' et les variations de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de Df.

2. Soit h la fonction de ℝ vers ℝ définie par : $\begin{cases} h(x)=f(x) & si \quad x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases}$

a) Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie I : Donner le tableau de variation de f et construire sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ en précisant l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Partie II

$\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit **S** la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation x = $\frac{-1}{2}$.

1. Soit C '= **S** (C) (image de C par **S**). Construire (C ') dans le même repère que (C).

Soit **g** la fonction admettant (C ') comme courbe représentative le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Vérifier que $g(x)=(x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et préciser Dg, ensemble de définition de g.

2. Résoudre graphiquement dans ℝ l'équation $f(x)=g(x)$.

Partie III

1) Justifier que $\forall\ n \in IN^*\quad f(n) \prec 1 \prec g(n)$. En déduire l'encadrement suivant de **e** :

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \prec e \prec \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Préciser cet encadrement si n = 1.

Soit $\ell(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Démontrer que $\forall\ n \in IN^*$ ℓ (n) est majoré par $\frac{2}{n}$.

2. Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de **e** permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} c'est-à-dire $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \prec 10^{-3}$.