SERIES: SET-MTI-MTGC / TSE

A– Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1°/ A un point M on associe le point M_1 image de M par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$, puis le point M'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\,\vec{i})$.

a) Calculer les coordonnées x' et y' de M'en fonction des coordonnées x et y de M.
b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M'.
c) Au point M on associe maintenant le pont N de coordonnées X et Y définies par :

$$(\text{I})\quad \begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N
Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ?

3°/ Au point M on associe le point N' de coordonnées X' et Y' définies par

$$(\text{II})\quad \begin{cases} X' = 1 + 3y \\ Y' = 1 - 2x \end{cases} \quad :$$

a) Quelle est la nature de l'ensemble E des points N'lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
b) Caractériser le transformé de E dans la transformation (I).

B– Dans tout ce qui suit on suppose qu'on associe au point M(x, y) le point M'(x', y') dont les coordonnées sont définies par :

$$(\text{III})\quad \begin{cases} x' = a + x\sin\theta + y\cos\vartheta \\ y' = a - x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases} \qquad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

1°/ Montrer que si $\sin\theta \neq 1$, la transformation (III) admet un point invariant w dont on calculera les coordonnées x_0 et y_0 en fonction de a et θ.

2°/ a) Calculer en fonction de a la somme $x_0 + y_0$ et en fonction de θ le quotient $\dfrac{x_0}{y_0}$.

b) En déduire que l'ensemble décrit par w quand θ varie, a restant fixe sur une droite D, et que l'ensemble décrit par w quand a varie, θ restant fixe sur une droite D'.

c) En s'appuyant sur ce qui précède, indiquer une construction géométrique du point w, a et θ étant connus.

d) Démontrer que la transformation définie par (III) est une isométrie dont on déterminera la nature. Montrer que (I) est un cas particulier de (III).

C– Soit la fonction numérique f : $x \mapsto (2x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

1°/ Etudier *f* et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé (O $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Préciser les tangentes à C aux points $x_0 = -1$ et $x_1 = -\dfrac{1}{2}$.

2°/ Soit C' la courbe symétrique de C par rapport à (O ; $\vec{i}$). On pose Γ = C ∪ C'. Tracer Γ.

3°/ On considère le point A(–1 ; 0) et la droite Δ : $x = -2$.

Soit $m \in$ IR* ; on considère la droite D : y = mx et la droite D' orthogonale à D en *O (0;0)*.

Les droites D et D' coupent Δ en *B* et *B*' respectivement Soit K le milieu de du bipoint (B ; B'),
la droite (AK) coupe D et D' en M et M' respectivement.

a) Déterminer les coordonnées de M et M' en fonction de m.

b) On appelle Γ_1 l'ensemble des points M lorsque $m \in$ IR* et Γ_1' celui des points M ' lorsque $m \in$ IR* Trouver une relation entre Γ_1 et Γ_1'.

<u>Barèmes</u> : A =10 pts ; B = 6pts ; C = 4 pts