EXAMEN : ***BAC*** **1992**

SERIES SET-MTI-MTGC Mathématiques Connaissance

EXERCICE I : (3 pts)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x\,y = 243 \\ 4(\log_x^y + \log_y^x) = 17 \end{cases}$

EXERCICE II : (4 pts)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & Si\ x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]0;+\infty\right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue à droite au point x=0.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.(On pourra poser $x = \dfrac{1}{t}$)

2°) a)Étudier le sens de variation de la fonction $f^{'}$ dérivée de f .

b) En déduire le sens de variation de f .

c°) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ \right)$.

3°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; calculer l'aire I_α du domaine plan compris entre la courbe (C) et les droites d'équations : $x = \alpha$; $x = 1$ et $y = 0$. (On pourra utiliser une intégration par parties et on remarquera que $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ $pour\ \ x \neq -1$).

Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I_\alpha$.

EXERCICE III : (3 pts)

Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ \right)$ on donne les points A(1 ;0) et B(0 ;1).

1°) Déterminer et tracer l'ensemble (C) des points M(x ;y) du plan P tels que le barycentre du système $\{(A;x)\ ;\ (B;y)\ ;(M;xy)\ \}$ n'existe pas.

2°) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ; a$\in \mathbb{R}_+^*$.

a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés : (A,2) ; (B ;1) ; (C,1).

b) Quel est l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = k\,a^2$; $k \in IR$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre k). Construire cet ensemble noté H pour k = 2).

EXERCICE IV : (3 pts)
Soit E un espace euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k}\ \right)$. On considère l'application f de E dans E qui à tout point M(x ;y ;z) associe le point M'(x' ; y' ; z') tel que : $\begin{cases} x'=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}2y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3} \\ y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3} \\ z'=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z+\frac{10}{3} \end{cases}$

1°) Existe-t-il des points invariants par f ?
2°) Démontrer que l'endomorphisme associé à f est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on déterminera.
3°) En déduire que f est un vissage dont f déterminera les éléments (axe, vecteur, angle).

EXERCICE V : (3 pts)
Le plan affine P étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ \right)$; on considère l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=x+1 \end{cases}$$

1°) Démontrer que f est un déplacement.
2°)Montrer qu'il existe un point A et un seul, invariant par f .
3°) Montrer que pour tout M ≠ A, de transformé M' par f on a : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM'}\right\|$ et que l'angle $(AM.AM')$ est constant.
4°) Quel est l'ensemble des points M de P tels que O ;M ;M' soient alignés ?

EXERCICE VI : (3 pts)
Soient les nombres complexes a et b définis par : $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad et\quad b=-\sqrt{3}+i$

1°) Ecrire a, b et $\frac{a}{b}$ sous forme trigonométrique.
2°) Montrer qu'il existe deux suites géométriques (u) et (v) vérifiant :
$u_2=v_2=a\quad et\quad u_4=v_4=b$.
On déterminera les premiers termes $u_0\ et\ v_0$ et la raison de chacune de ces deux suites.

EXAMEN : *BAC* **1992**

SERIE SET Mathématiques Composition

On désigne par E l'ensemble des applications f de ℝ dans ℝ définies par :
$f(x) = (ax+b)e^{2x} + (cx+d)\ e^{-2x}$ où a, b, c, d sont des coefficients réels.

A/- 1°) Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace F des applications de ℝ dans ℝ.

2°) On considère les applications f_1 ; f_2 ; f_3 *et* f_4 de ℝ dans ℝ définies par :
$\forall x \in IR,\ \ f_1(x) = xe^{2x}$; $f_2(x) = e^{2x}$; $f_3(x) = xe^{-2x}$; $f_4(x) = e^{-2x}$

Montrer que $(f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4)$ est une base de E.

3°) On désigne par P l'ensemble des applications paires de E dans E et par I l'ensemble des applications impaires de E.

a) Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E ;
b) h_1 ; h_2 ; h_3 *et* h_4 sont des applications de ℝ dans ℝ définies par :
$h_1(x) = xe^{2x} - xe^{-2x}$; $h_2(x) = e^{2x} + e^{-2x}$; $h_3(x) = xe^{2x} + xe^{-2x}$; $h_4(x) = e^{2x} - e^{-2x}$
c) Montrer que $(h_1 ; h_2)$ est une base de P et que $(h_3 ; h_4)$est une base de I ;
d) Montrer que P et I sont des sous-espaces supplémentaires de E ;
e) f étant un élément quelconque de E, écrire f comme somme de d'un élément de P et d'un élément de I .

B-/ On désigne par G le sous-ensemble de F dont les éléments f sont définies par $f(x) = (ax+b)e^{2x}$, où a et b sont des coefficients réels.

1°) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont une base est $(f_1 ; f_2)$.

2°) Soit g l'application de G dans G définie par : $\forall\ f \in G$, $g(f) = f\,'$ où $f\,'$ est la dérivée de f .

a) Montrer g est un endomorphisme de G ;
b) En déduire la matrice de g^{-1} dans la base $(f_1 ; f_2)$.
c) Calculer $g^{-1}(f)$ et vérifier que $g^{-1}(f)$ est une primitive de f ; f étant un élément quelconque de G.

C-/ Soit f un élément de G de composante (-2 ;1) dans la base $(f_1 ; f_2)$.

1°) Étude et représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité : 2cm).

2°) Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan limité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$ *et* $y = 0$.

EXAMEN : ***BAC*** ***1992***

SERIES MTI-MTGC Mathématiques Composition

<u>Les parties I ; II ; III peuvent être traitées indépendamment.</u>

I-/On considère la famille de fonctions f_m ; m paramètre réel quelconque, définies par : $f_m(x) = e^{x-1} - mx$, et (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1°) Étudier la fonction f_1 et tracer sa courbe (C_1). Montrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C_1).

2°) Calculer en cm^2 l'aire A(λ) de la portion du plan limitée par (C_1), la droite (Δ_1) et les droites d'équations : $x = 1 \;\; et \;\; x = \lambda$; $\lambda < 1$. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

3°) Étudier suivant les valeurs de m, les divers aspects du tableau de variation de f_m. On précisera les limites de f_m aux bornes du domaine de définition.

4°) Montrer que la droite (Δ_m) d'équations $y = -mx$ est asymptote à (C_m), et préciser la position cette courbe par rapport à (Δ_m).

II-/ On considère la fonction g définie par $g(x) = (x-2) - \ln\left[(x-2)^2\right]$

1°) Calculer $g(0)$; $g(2)$; $g(4)$; $g(5)$

2°) Étudier et représenter graphiquement la fonction g dans le même repère que f_1. Soit (Γ) la courbe représentative de g (utiliser une autre couleur).

3°) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement trois solutions dont on précisera les parties entières.

III-/ On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$f(z) = z^2 - (9+2i)z + 26$.

1°) Déterminer le nombre complexe u tel que $u^2 = -3+4i$ puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.

2°) On pose $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M(x ;y) du plan complexe, tels que $f(z)$ soit un réel. Préciser la nature de cet ensemble.