

SERIES: SET-MTI-MTGC / TSE**EXERCICE 1 : (5 points)**

Soit m un nombre entier

1. Montrer que l'équation : $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $6y - 3x = m$. Admet des solutions si et seulement si m est multiple de 3.
2. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations :
 - a) $6y - 3x = 5$
 - b) $6y - 3x = 3$
3. Dédire de ce qui précède les solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation :

$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$$

EXERCICE 2 : (5points)

1. Calculer $\int_0^1 e^x dx$
2. Soit f , l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$$
 - a) Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $f(z) = 0$

c) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

PROBLEME : (10points)

Les parties A) et B) du problème sont indépendantes.

A) Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O,

tel que : $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$

Soit P un point du segment [BC], distinct de B. On note Q le point d'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (d) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure en prenant $BC = 3\text{cm}$, $BP = 1\text{cm}$ et en plaçant (BC) horizontalement sur la feuille.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a) Préciser l'image de la droite (BC) par r .
 - b) Déterminer les images de R et P par r .
 - c) Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?

3. On note N le milieu de [PS] et M celui de [QR].

Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- a) Préciser les images des points R et P par s .
- b) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
- c) De ce qui précède, déduire que les points M, N, B, et D sont alignés.

B) Soit n un entier naturel non nul.

Dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points

A_n de l'axe $(O; \vec{i})$ définis par : $\vec{OA}_1 = \vec{i}$; $\vec{A_1A_2} = 2\vec{i}$; $\vec{A_2A_3} = 2^2\vec{i}$; ; $\vec{A_nA_{n+1}} = 2^n\vec{i}$

On considère les carrés $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ construits respectivement sur les segments $[OA_1]$; $[A_1A_2]$; ... ; $[A_nA_{n+1}]$; ... et dont les sommets ont une ordonnée positive.

Les points O, A_1, B_1, C_1 sont les sommets de K_1

Les points A_1, A_2, B_2, C_2 sont les sommets de K_2

Les points A_{n-1}, A_n, B_n, C_n sont les sommets de K_n où l'abscisse de B_n est supérieure à celle de C_n .

On fera une figure en prenant un centimètre (1 cm) comme unité.

1. a/ Calculer les coordonnées de B_n et de C_n .
 b/ Montrer que les points C_1, C_2, \dots, C_n sont alignés.
 c/ Montrer que les points B_1, B_2, \dots, B_n sont alignés.
 d/ Donner une équation cartésienne de chacune des droites (C_1C_2) et (B_1B_2) .
2. Soit O_n le centre du carré K_n .
 a) Calculer les coordonnées de O_n
 b) Montrer que O_1, O_2, \dots, O_n sont alignés.
 c) Ecrire une équation de la droite (O_1O_2) .
3. a/ Calculer l'aire U_n du carré puis la somme :

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

 b/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{4^n}\right)$
4. a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une homothétie h de centre $\Omega (-1 ; 0)$, transformant le carré K_n en le carré K_{n+1} .
 b/ Préciser le rapport de cette homothétie.

Retrouver ainsi les résultats obtenus aux questions 1 et 2.

5. soit r la rotation de centre O_1 et d'angle π
 - a) Montrer que $h' = h \circ r$ est encore une homothétie transformant K_1 en K_n ;
 - b) Déterminer le centre Ω' et le rapport de h' lorsque $n = 2$.