

SERIES: SET-MTI-MTGC/TSE

EXERCICE I : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.

On note (c) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 3cm.

1-a) - Etudier le sens de variation de f

b) - Donner une équation de la tangente (Δ) à la courbe (c) en son point d'abscisse 0.

c) - Construire (c) et (Δ) .

2- En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - f(x)$,
démontrer que l'équation $x = f(x)$ a une solution unique α et que $\alpha \in [2; 3]$.

EXERCICE II : (4points)

Dans le plan P on considère trois points A , B , et C . Soit s la réflexion d'axe (AC) qui transforme B en D et soit f l'application affine de P dans P telle que :

$$f(A) = A ; f(B) = C \text{ et } f(C) = D.$$

1) On pose: $g = s \circ f$

a) Déterminer l'image par g des points A , B , C et celle du milieu I de $[BC]$

b) Etablir g est une symétrie dont on précisera l'axe (d) et la direction.

c) Exprimer f en fonction de g et s . En déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point M de P par f .

2) Comment faut-il choisir A , B , et C pour que f soit une isométrie ?
Explicitez alors cette isométrie.

PROBLÈME : (12 points)

Dans ce problème, n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $]0; +\infty[$ [comme suit :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, et on note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de la fonction f_n .

A- Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1 .

1- a) – Etudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.

b) – Etudier le comportement du rapport $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Que peut-on conclure pour la fonction f_1 et la courbe (\mathcal{C}_1) ?

2- a) – Justifier la dérivabilité f_1 sur $]0, +\infty[$. Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0, +\infty[$.

b) – Etudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1 .

3- Tracer la courbe (\mathcal{C}_1) , son asymptote et la tangente au point O.

B– La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.

2. a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0, +\infty[$.

Démontrer que : $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$ où g_n est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ que l'on déterminera.

b) Etudier les variations de g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.

c) Dresser le tableau de f_n

C– La troisième partie porte sur les courbes (\mathcal{C}_n) lorsque $n \geq 2$.

1. Quelle est la tangente à (\mathcal{C}_n) en O origine du repère ?

2. Etudier la position relative de (\mathcal{C}_n) et (\mathcal{C}_{n+1}) pour $n \geq 2$. Quelle est la position de (\mathcal{C}_1) par rapport à toutes les courbes (\mathcal{C}_n) ?

3. a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$. Que peut-on en conclure pour (\mathcal{C}_2) ?

b) On précisera la position de (\mathcal{C}_2) par rapport à la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$

4. Tracer (\mathcal{C}_2) et (\mathcal{C}_3) dans le même repère que (\mathcal{C}_1) .