**SERIES:** SET-MTI-MTGC/TSE

## **EXERCICE 1** : (6 points)

**1°)-** Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, on a

$$3^{2n+3}+2^{n+3}\equiv 0[7]$$

**2°)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation :

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

**3°)-** Résoudre le système :

(a, b) ∊ $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ $m$ étant le P.P.C.M des entiers a et b.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{e_1};\vec{e_2}$) d'unité 1 cm, on considère les points A, B, et C d'affixes respectifs :

$$a=2-2i\sqrt{3}\ ;\quad b=2+2i\sqrt{3}\ ;\quad c=8$$

**1°)** Ecrire a ; b ; et c sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C.

**2°)** Calculer le nombre complexe :

$q=\dfrac{a-c}{b-c}$ que l'on écrira sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.

**3°)** Déterminer le barycentre G des points pondérés (A,|a|) ; (B ;|a|) ; (C ;|c|) puis placer le point G.

**4°)** Déterminer et construire l'ensemble (**E)** des points M du plan tels que :

$$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}\right\|=\left\|\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}\right\|$$

## **EXERCICE 2** : (4points)

**1) a)** Vérifier que tout nombre réel x $\neq 1$ et x $\neq -1$, on a :

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

**b)** Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Déduire de a), la valeur de l'intégrale :

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx$$

**2) a)-** En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de α, l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$$

**b)-** Déterminer la limite de $I$ (α) quand le nombre réel positif tend vers 0.

**3)-** Soit **A =** $\overline{10101010}$ un nombre écrit en base deux. Ecrire **A** dans le système de numération décimale.

## **PROBLEME : (10points)**

On désigne par $\mathcal{R}$ = (O, $\vec{i}\,;\vec{j}$) un repère orthonormé du plan, et a, b, et c des réels quelconques.

Les fonctions $f_0$, $f_1$, $f_2$ et $f$ sont respectivement définies sur l'ensemble ℝ des réels par :

$f_0(x) = e^{\frac{-x}{2}}$ ; $f_1(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$ ; $f_2(x) = x^2 e^{\frac{-x}{2}}$ et $f(x) = (a + bx + cx^2)e^{\frac{-x}{2}}$

On désigne par $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ les courbes représentatives de $f_0$, $f_1$, et $f_2$ dans le repère.

**A. On se propose de représenter $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.**

1. Etudier les variations des fonctions $f_0$, $f_1$, et $f_2$
2. Préciser par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, les points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_0)$ ; $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_0)$ ; $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_1)$.
3. Etudier sur l'ensemble ℝ des réels, le signe de chacune des expressions : $f_1(x) - f_0(x)$ ; $f_2(x) - f_0(x)$ et $f_2(x) - f_1(x)$.
4. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère $\mathcal{R}$, et hachurer le domaine fermé (**E**) déterminé par les trois courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ , c'est-à-dire l'ensemble (**E**) des points M du plan, dont les coordonnées (x ; y) dans le repère $\mathcal{R}$ vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f_2(x) \leq y \leq f_0(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) \leq y \leq f_{0(x)} \end{cases}$$

**B. On se propose de calculer l'aire de (E)**

**1.** Soit n, un entier naturel quelconque. Démontrer qu'en posant :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{\frac{-t}{2}} dt \;;$$

On définit une fonction $I_n$ qui a l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels pour ensemble de définition.

**2.** Soit n, un entier naturel et x un réel quelconque.
Démontrer que :

$$I_{n+1} = -2x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} + 2(n+1) I_n(x)$$

**3.** Soit x un réel quelconque.

**a)** Calculer $I_0(x)$ en fonction de x.

**b)** En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x.

**4.** Calculer l'aire de (**E**).

**C. On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f. On désigne par $f^0$** (ou $f$), $f^{(1)}$ (ou $f'$), $f^{(2)}$ (ou $f''$), $f^{(3)}$ (ou $f'''$), etc. les dérivées successives de la fonction $f$.

**1.** Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on peut trouver trois réels $\alpha_n$ , $\beta_n$ et $\gamma_n$ vérifiant pour tout nombre réel :

$$f^{(n)}(x) = (\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2)\, e^{\frac{-x}{2}}$$

On trouvera $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$ et pour chaque entier naturel n, le raisonnement par récurrence montrera que : $\alpha_{n+1}$ , $\beta_{n+1}$ et $\gamma_{n+1}$, vérifient :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2}\alpha_n \quad , \qquad \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2}\beta_n \qquad \text{et} \qquad \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2}\gamma_n$$

**2.** Pour chaque entier naturel n, on pose :

$$\beta_n' = \beta_n + 4n\,\gamma_n \qquad \text{et} \qquad \alpha_n' = \alpha_n + 2n\,\beta_n + 4n(n+1)\,\gamma_n$$

Démontrer que $(\gamma_n)$ , $(\beta_n')$ , et $(\alpha_n')$ sont des suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

**3.** En déduire pour chaque entier naturel n, l'expression de $\alpha_n$, $\beta_n$ et $\gamma_n$ en fonction de n, a, b et c.