

SERIES: SET-MTI-MTGC/TSE**EXERCICE 1** : (5 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n .
En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.
 - b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.
2. a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.
b) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2 \pmod{15}$.
c) Résoudre l'équation : $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad 21590x + 9525y = 1270$.
d) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?
3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles du second ordre.
 - a) $Y'' - Y' + \frac{1}{4}Y = 0$.
 - b) $y'' + y' + y = 0$.
4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle : $x'' + 5x' + 6x = 0$ vérifiant les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -6$; t est la variable.

EXERCICE 2 : (5points)

1. Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par :
 $Z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} Z_n$.
 - a) Calculer le module et un argument de $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.
 - b) Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et vérifier que Z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .
 - c) Calculer le rapport $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$.
En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que : $|Z_{n+1} - Z_n| = \sqrt{3}|Z_{n+1}|$.

2. Le cm est l'unité de longueur choisie. On fera une figure pour visualiser.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' milieu de [AC] et un point D tel que : $4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$.

a) Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (A,3) ; (B,-2) ; (C,3). En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

b) Démontrer que: $\vec{BB'} = \frac{2}{3}\vec{BD}$.

c) Calculer DA^2 et DB^2 .

d) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

Vérifier que l'isobarycentre G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E). Tracer (E).

3.a) Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ placer les points Q (6 ; 0 ; 0) , R (0 ; 6 ; 0), S (0 ; 0 ; 4)

b) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massifs (Q,2) ; (O,1) ; (R,3).

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que:

$$(\vec{MO} + 2\vec{MQ} + 3\vec{MR}) \cdot \vec{MS} = 0. \text{ Donner une équation cartésienne de (E).}$$

d) Déterminer l'intersection de (E) et du plan d'équation $X=0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

PROBLEME : (10points)

A. La fonction numérique de la variable réelle x, est définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$$

1. a) - Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

b)- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation;

2. a)- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R}_+^* une solution unique ℓ et que $\ell \in]1; 2[$.

b)- Etudier le signe de f(x) lorsque x décrit \mathbb{R}_+^* .

B. On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

1. Soit la fonction numérique définie sur l'intervalle [1;2] par : $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln x$

a) Etudier les variations de φ . Prouver que l'image par φ de l'intervalle [1 ;2] est un intervalle contenu dans [1 ;2].

b) Montrer que ℓ est l'unique solution de $\varphi(x) = x$

2. On considère alors la suite U définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Démontrer que, pour tout entier n , on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Prouver que pour tout entier x de $[1 ; 2]$ on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier n on a :

$$|U_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2} |U_n - l|$$

d) Montrer que la suite U converge vers l .

e) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de l .

C. La fonction g est définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases} \quad \text{pour } 0 < x \leq 1$$

a) Etudier la dérivabilité de g en 0.

b) Soit g' la dérivée de la fonction g .

Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis vérifier que $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $0 < x \leq 1$.

c) En déduire le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0 ; 1]$. Dresser le tableau de variation de la fonction g .

D. Dans cette partie, l'objectif est le tracé de la courbe représentative (C) de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Unité graphique 10 cm).

1. a) Montrer qu'une équation de la tangente (d) à la courbe (C) de g en son point d'abscisse 0 est $y = x$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (c) et de la droite (d)

c) Etudier la position relative de (c) et de (d).

d) Soit α la fonction définie sur $[0; e^{-\frac{7}{2}}]$ par $\alpha(x) = g(x) - x$.

Etudier le sens de variation de fonction et en déduire que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; e^{-\frac{7}{2}}]$ on a : $0 \leq \alpha(x) \leq 5 \cdot 10^{-5}$. Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle

$[0; e^{-\frac{7}{2}}]$ la courbe (c) de la droite (d) ?

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur $[0; 1]$

par : $\beta(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x$

a) Montrer que la droite (d) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de (c) et de (Γ).

c) Tracer, sur un même graphique (d) ; (Γ) ; et (c).