BAC **2000**

SERIES: SET-MTI-MTGC-TSE

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Ecrire en base deux, puis en base seize, l'entier naturel N = 6932.

2. a) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer le terme général r_n en fonction de n et de r_0 .

b) Soit (θ_n) la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 ; $\theta_0 \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer le terme général en fonction de n et θ_0.

c) $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, on pose : $Z_n = r_n e^{i\theta n}$. Sachant que Z_0, Z_1, $Z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes Z_0, Z_1, Z_2.

3. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle M_n le point d'affixe $Z_n = r_n e^{i\theta n}$.

a) Placer dans (P) les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer $\left\| \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right\|$ en fonction de n.

c) On pose $\mathbf{I_n} = \sum_{k=0}^{n} \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|$. Calculer $\mathbf{I_n}$ en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{I_n}$.

4- a) Ecrire sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe

$$Z = \frac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

EXERCICE 2 : (5points)

1. soit un triangle ABC du plan, **I** le milieu du segment [BC] et D le barycentre des points (A ; –1) ; (B ; 2) ; (C ; 2)

a) Exprimer $\vec{AD}$ en fonction de $\vec{AI}$.

b) Déterminer l'ensemble **(E)** des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \right\|.$$

c) Justifier que (**E**) contient **I.**

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal **(O,** $\vec{u}, \vec{v}$ **)** direct d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe1, B le point d'affixe 2i et C le point d'affixe Z.

a) Que représente géométriquement $\left|\frac{Z-2i}{1-2i}\right|$ et arg $\left(\frac{Z-2i}{1-2i}\right)$?

b) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe Z est défini par :

BC = $\sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et ($\overbrace{\vec{BA};\vec{BC}}$) = α où $\alpha \in]-\pi\ ;0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **.** Calculer $\sin\alpha$.

c) Démontrer que $\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le complexe Z et vérifier que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

PROBLEME : (10points)

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur] –1 ; 1] par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

($\mathcal{C}$) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

I- 1°) Prouver que la courbe ($\mathcal{C}$) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2°) a) Déterminer f^{-1}.

b) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer ($\mathcal{C}$).

3°) a) Par la technique de l'intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$\mathbf{J_1} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$$

b) En déduire l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et la droite d'équation : x = $\frac{1}{2}$.

II. On considère la fonction g de R vers R définie sur l'intervalle [0 ; $\frac{\pi}{2}$[par :

g(x) = f (sinx) où f est la fonction définie ci-dessus.

1. a) Démontrer que g est une primitive sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$[de la fonction h de R vers R définie sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$[par : **h (x) =** $\frac{1}{\cos x}$**.**

b) Calculer l'intégrale $\mathbf{J_2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$. On donnera le résultat sous la forme $\mathbf{J_2} = \ln a$ où **a** est un réel strictement positif.

2. On considère la suite ($\mathbf{I_n}$) n ϵ ℕ définie par :

$$\mathbf{I_0} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{J_n} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

Expliquer brièvement pourquoi $\mathbf{I_n} \geq 0$; ∀ n ϵ ℕ

3. On pose, pour tout entier naturel n,

$$\mathbf{K_n} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} \right) dt$$

a) Prouver que $\mathbf{K_n} \geq 0$; ∀ n ϵ ℕ.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq \mathbf{I_n} \leq \frac{\ln b}{c^n} \quad \text{où b et c sont deux réels à déterminer.}$$

c) Déterminer la limite de la suite ($\mathbf{I_n}$) n ϵ ℕ.

<u>Partie B</u>

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $\mathbf{F_n}$ de **R** vers **R** définie sur l'intervalle [0 ; $\frac{\pi}{2}$ [par : $\mathbf{F_n}$ (t) = $\sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$.

1. Soit **q** un réel et n ≥ 1.

a) Calculer en fonction de q et n la somme :

$\mathbf{T_n} = 1 + \mathbf{q} + \mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^3 + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{q}^{n-1}$.

b) En utilisant le résultat précédent, déterminer pour t ϵ $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, une expression simplifiée de la somme : $S_n(t) = 1 + \sin^2 t + \sin^4 t + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sin^{2n-2} t$.

c) Soit F_n' la fonction dérivée de F_n. Calculer $F_n'(t)$.

On établira que pour tout réel **t** de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ on a : $F_n'(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t}$

d) Calculer $F_n(0)$.

2. a) Exprimer l'intégrale $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t)dt$ en fonction de J_2 et I_0. En déduire que :

$F_n(\frac{\pi}{6}) = \alpha\, g(\frac{\pi}{6}) + \beta\, I_n$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer.

b) En déduire la limite de la suite (U_n) nε ℕ définie par :

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^7} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}.$$