

SERIES: SET– MTI – MTGC - TSE

EXERCICE 1 :..... (5 points)

1-/ Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha ; \beta)$ dans chacun des cas suivants :

- a) $17\alpha - 19\beta = 2$ (0,5pt)
 b) $17\alpha - 19\beta = -2$ (0,5pt)

2-/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

- a) $n \equiv 0 [17]$ et $n \equiv -2 [19]$ (0,5pt)
 b) $n \equiv 0 [19]$ et $n \equiv -2 [17]$ (0,5pt)

3-/ En déduire l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323. (1pt)

4-/ P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$ et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

On considère l'application affine $f : P \rightarrow P; M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a-/ Vérifier que f est bijective. (0,5pt)

b-/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f . (0,5pt)

c-/ On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M' . Exprimer Z' en fonction de Z . en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f . (0,5pt)

EXERCICE 2 :(4 points)

1-/ On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases} \text{ où } y \text{ et } z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variables } x.$$

a-/ Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$. (0,5pt).

b-/ Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système. (0,5pt)

Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y=1$ et $z=-1$ pour $x=0$. (0,5pt)

2-/ On considère la suite complexe (W_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* W_n = \left(1 + \frac{1}{nz}\right)^n$ où z est un complexe non nul tel que $z = x + iy$.

a-/ Calculer $\ln|W_n|$ et montrer que : $\ln|W_n| = \frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}\right)$ (1pt)

b-/ On pose $\alpha_n = \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$

- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n$ (1pt)

- Vérifier que $\ln|W_n| = \frac{n}{2} \alpha_n \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$. (0,5pt)

En déduire pour z complexe de module 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln|W_n|$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} |W_n|$. (1pt)

PROBLÈME:(10 points)

I-/

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit (C_k) la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités (5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1-/ Etudier le sens de variation de g . (0,5pt)

2-/ En déduire que pour tout réel α positif ou nul, $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$. (0,5pt)

II-/

1-/ Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$. (0,5pt)

3-/ Dresser la tableau de variation de f_1 . (0,5pt)

III-/

1-/ Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k . (1pt)

2-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ $f_k(x) = \ln(1 + k \frac{x}{e^x})$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$. (1pt)

3- a-/ Dresser la tableau de variation de f_k . (0,5pt)

b-/ Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{2}$. (0,5pt)

4-/ Déterminer une équation de la tangente T_k à (C_k)

5-/ Soit p et m deux réel strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m) . (0,5pt)

6-/ Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en 0 dans le repère orthogonal du plan. (1,5pt)

IV-/

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1-/ Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda kxe^{-x} dx$

(on pourra utiliser les résultats de la question préliminaire I-/. (0,5pt)

2-/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : $\int_0^\lambda kxe^{-x} dx$. (0,5pt)

3-/ On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat. (0,5pt)