BAC **2004**

SERIES: SET– MTI – MTGC - TSE

EXERCICE 1 : (4 points)

Soit A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et G le barycentre du système {(A,-2);(B,1)}.
1) Démontrer que A est le milieu du segment [GB].
2) Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{MA}{MB} = \sqrt{2}$ est le cercle de centre G et de rayon r que l'on déterminera en fonction de AB.
3) Soit C un point de (Γ) et ($\mathcal{D}$) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-2\,MB^2 + MB^2 + MC^2 = 0$$

Montrer que le point C appartient à ($\mathcal{D}$).
4) Calculer $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CG}$ et en déduire l'ensemble (D).
5) Démontrer que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 2 : (5points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (p,q) : $11p - 7q = 1$
b) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?
c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue f :

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$$

b) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $x^2 g'(x) + 2x\,g(x) = 1$.
Déduisez-en la résolution de l'équation (E).
3) Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.
a)- Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$; calculer U_2.
b)- On désigne par *m* et *d* respectivement le *PPCM* et le *PGCD* de U_1 et U_3 ;
Sachant que $\frac{m}{d} = 12$; déterminer U_1 et U_3.
c)- En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots + U_n$ en fonction de n.
Déterminer n pour que S_n soit égale à 525.

PROBLEME : (11points) Les Parties A et B du problème sont indépendantes

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

définie par z' = $\frac{5}{\bar{z}}$ *où* $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1) Déterminer l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe 1+ i.
Vérifier que les points O, A et A' sont alignés.

2) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés.

3) Trouver l'ensemble (Γ) des points invariants par f.

4) a) Soit z ≠ 0, montrer que si $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$ *alors* $\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right|$

b) En déduire que si M est un autre point autre que O du cercle (C) de centre A passant par O, alors son image M' par f appartient à une autre droite (D) que l'on déterminera.

c) Montrer que tout points de (D) est l'image par f d'un point de (C) – {O} par f.

d) Tracer (Γ), (D) et (C) dans le même repère.

e) En déduire l'image (C) – {O} par f.

Partie B : n est un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur [0 ; + ∞[par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$

1– a) Etudier les variations de f_1 puis donner une équation de la tangente (T) à sa courbe (C_1) au point d'abscisse 0.

b) Tracer (C_1) et (T) dans le même repère (unité 3 cm)

c) Exprimer en cm² l'aire du domaine plan limité par (T), (C_1) et la droite d'équation x = 1.

2– Montrer que f_1 réalise une bijection de [0 ; + ∞[vers un intervalle J que l'on précisera. Construire sur le même repère que (C_1) la courbe (C'_1) de la bijection réciproque f_1^{-1}.

3– a) Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur [0 ; + ∞[. Préciser $f_n'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

Donner le tableau de variation de f_n .

b) Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

c) Démontrer par récurrence que, pour tout n élément de ℕ, $e^{n+1} > 2n+1$,
en déduire le signe de $f_n(n+1)$.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur [n ; n+1] .
Cette solution est notée Un.

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$.

f) En remarquant que pour tout x ε [0 ; + ∞[$\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$. Montrer que la valeur moyenne M_n de f_n sur [0 ; U_n] est égale à : $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2\left(\frac{n}{U_n}\right)\ln\left(\frac{U_n}{n}+1\right)$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.