EXERCICE 1 : (6 points)

1°) a) Déterminer sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.

b) Calculer $(1-i)^6$

c) En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$

2°) a) Démontrer par récurrence que $\forall$ n ε ℕ, $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.

b) En déduire que si l'entier n n'est pas multiple de 3 alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

3°) Soient A, B, et C trois points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ et α un nombre réel.

A tout point M de $\mathcal{P}$ n associe par l'application f_α le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}.$$

Préciser, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de l'application f_α.

EXERCICE 2 : (4 points)

1) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

(on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction qui à x associe lnx sur l'intervalle [n ; n+1].)

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \geq \ln(n+1)$ puis calculer la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

2) Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé et ℂ est le corps des nombres complexes. A tout M (x ;y) d'affixe z l'application f associe le point M' (x' ;y') d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

Exprimer z' en fonction de z puis donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

PROBLEME: **(10points)**

A) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{1}{2}[\ln x-\ln(1-x)]$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ (Unité graphique 5 cm).

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble. En déduire les équations des droites asymptotes à la courbe ($\mathcal{C}$) .

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2°) a) Montrer que le point A ($\frac{1}{2}$; 0) est centre de symétrie de ($\mathcal{C}$) .

b) Déterminer une équation de la tangente ($\mathcal{D}$) à ($\mathcal{C}$) au point A.

c) On pose : $\varphi(x)= f(x)-2x+1$. Étudier les variations de φ puis déduire les positions relatives de ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{D}$).

3°) Tracer ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{D}$) dans le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

B)

1°) On considère la fonction *h* définie sur] 0 ; 1[par *h* (x) = $f(x)-x$

a) En utilisant les variations de la fonction h, démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique que l'on notera α dans] 0 ; 1[.

b) Montrer que 0,8 $\leq \alpha \leq$ 0,9.

2°) On appelle S la réflexion d'axe Δ : y = x et ($\mathcal{C}$') l'image de ($\mathcal{C}$) par S.

a) Démontrer q'un point M (x ; y) ∈ ($\mathcal{C}$') si et seulement si x ∈] 0 ; 1[et

$$2x = \ln\left(\frac{y}{1-y)}\right).$$

En déduire que ($\mathcal{C}$') est la représentation graphique de la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

b) Tracer Δ et ($\mathcal{C}$') dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ de la partie A)

c) Montrer que le réel α est l'unique solution de l'équation g (x) = x.

C)

1°) On appelle **I** l'intervalle] 0,8 ; 0,9 [

a) Calculer g' (x) et g'' (x)

b) Montrer que pour tout réel x de **I**, g (x) est aussi élément de **I** et que : 0≤ g' (x) ≤ 0,3.

c) En déduire que pour tout x élément de **I** on a : $|g(x)-\alpha| \leq 0,3|x-\alpha|$.

2°) On considère la suite (U_n) d'élément de **I**, définie par U_0 = 0,8 et pour tout entier naturel n U_{n+1} = g (U_n).

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha| \leq 0,1\ (0,3)^n$. Puis $|U_n-\alpha| \leq 0,1(0,3)^n$

b) Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de U_p à 10^{-4}.