BAC **2007**

SERIES: SET– MTI – MTGC - TSE

Exercice 1 :-- **[4,5 points]**

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec *a* un entier naturel non nul.

a.) Démontrer que si *n* est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés. *(1pt)*

b.) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Etudier la réciproque de la propriété **a.)** *(1pt)*

2°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe ($\mathcal{C}$) d'équation $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

a.) Préciser les éléments de symétrie de ($\mathcal{C}$) *(1pt)*

b.) Construire ($\mathcal{C}$) dans le plan muni du repère orthonormé. $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. *(1,5 pt)*

Exercice 2 : -- **[*5,5 points*]**

1°/ Soit *f* l'application affine du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même définie par son expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

a.) Montrez que *f* admet un seul point invariant J. *(0,5pt)*

b.) Montrez que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où M**'** = *f*(M).
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de *f*. *(1pt)*

c.) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ image du cercle $\mathcal{C}$ d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par *f*. *(1pt)*

TSVP 🕮

2°/ On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

a.) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ *(1,5pt)*

b.) Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$; puis en déduire les solutions de l'équation (E) *(1,5pt)*

<u>Problème</u> : --- [*10 points*]

A-//

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

1°/ a.) Justifier l'existence d'un réel unique α compris entre 0,5 et 1 tel que

$$f(\alpha) = 0$$ *(1,5pt)*

b.) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x *(1 pt)*

2°/ Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$. En déduire le tableau de variation de g *(1,5pt)*

B-//

1°/ Montrer que le réel α défini dans la partie **A-// 1°/ a.)** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x).$$ *(1pt)*

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ *(0,5pt)*

b.) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}\,;1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ *(0,5pt)*

c.) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. *(0,5pt)*

TSVP 🕮

d.) En déduire que, $\forall x \in [\frac{1}{2}\ ; 1]$ on a $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$. *(0,5pt)*

3°/ On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a.) Montrer que, pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, et que la suite (U_n) est décroissante.

(1 pt)

b.) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |\, u_{n+1} - \alpha \,| \leq (0{,}3) \times |\, U_n - \alpha \,| \text{ puis que } |\, u_n - \alpha \,| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n.$$

c.) En déduire que la suite (U_n) converge vers α . *(0,5pt)*

d.) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de U_{n_0} donnée par la calculatrice. (avec 5 décimales). *(0,5pt)*