

Exercice 1 [5 points]

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (1pt)

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (1pt)

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes de l'équation (E). (1pt)

4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4^{ème} solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. (1pt)

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) (1pt)

Exercice 2 [5 points]

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O ; \vec{i})$.

1°/ Soit M un point du plan et M_1 son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$

a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M . (1,5pt)

b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M' . (1pt)

c) Au point $M(x ; y)$ on associe maintenant le point $N(X ; Y)$ telles que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ . (1pt)

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N .

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ? (1,5pt).

Problème..... [10 points]

A.// Soit g la fonction numérique définie sur \mathbf{R} par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1°/ Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$. (0,5pt)

2°/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (1pt)

3°/ On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 en est une. (0,5pt)

b) L'autre solution est appelé α . Montrer que $-1,6 < \alpha < -1,5$ (0,5pt)

4°/ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x . (1pt)

B.// Soit f la fonction numérique définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$) (0,5pt)

2°/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A.//) Etudier le sens de variation de f . (1pt)

3°/ Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie 1.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$ (1,5pt)

4°/ Etablir le tableau de variation de f . (0,5pt)

5°/ Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm). (1pt)

C.// Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx$

1°/ Montrer que pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. (0,5pt)

2°/ À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$. (1pt)

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^{\pi} + 1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5pt). $|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n .

NB : La partie C.// est indépendante des parties A.// et B.//