

Exercice 1[6 points]

A/. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{1 - x^2}$$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5pt)

2°/ Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x de D_f on ait

$$f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x} \quad (1pt)$$

3°/ En déduire l'ensemble des primitives de f sur D_f (0,5pt)

B/. Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit

et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept

1°/ Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues. (1,5pts)

2°/ Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter. (1pt)

3°/ a-) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers (0,5pt)

b-) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le $\text{pgcd}(m_1 ; m_2)$. (0,5pt)

4°/ Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs. (0,5pt)

Exercice 2[6 points]

I/ On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1°/ On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ Ecrire X et Y en fonction de x et y . (1,5pt)

2°/ Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul. (1pt)

3°/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) . (1pt)

II/ 1°/ On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ? (1,5pt)

2°/ Trouver les diviseurs dans \mathbb{N} de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que :

$$n^2 - 240 \text{ est un carré parfait. (1pt)}$$

Problème[8 points]

Soit f la fonction de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$.

1°/ a-) Etudier le sens de variation de f . (1,5pt)

b-) Etudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. (0,5pt)

c-) Dresser le tableau de variation de f . (0,5pt)

2°/ On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$: 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

a-) Donner une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse nulle. (0,5pt)

b-) Tracer (T) et (\mathcal{C}) . (1pt)

3°/ En utilisant les variations de f , démontrer que $\forall x \in [1; 2], 1 \leq f(x) \leq 2$ (1pt)

4°/ a-) Démontrer que pour tout réel x de $[1; 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ (1,5pt)

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout x de $[1; 2]$ on a : $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$. En déduire un encadrement de f sur $[1; 2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure. (1,5pt)

Exercice 1[6 points]

1°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points $A(1 ; -1)$ et $B(5 ; 3)$ et la suite (Ω_n) définie par : pour tout entier $n \geq 1$, Ω_n est le barycentre de $(\Omega_{n-1} ; 2)$, $(A ; 1)$ et $(B ; 1)$ et Ω_0 est en O. On note $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de Ω_n .

- a) Placer dans le plan les points Ω_1, Ω_2 et Ω_3 et montrer qu'ils sont alignés.
- b) Montrer que pour tout entier naturel n , Ω_{n+1} est l'image de Ω_n par une homothétie que l'on précisera.

c) Justifier que, pour tout entier n de \mathbb{N} , $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}$.

d) Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel non nul n on a :

$x_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{3}{2^n}$. En déduire une expression simple de x_n en fonction de n , puis la limite de la suite (x_n) .

2°/ Donner la solution générale sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$y'' + y' - 2y = 0$ et en déduire la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3$ sachant que le polynôme $P(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de (E)

Exercice 2[5 points]

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $5x - 11y = 4$. (1pt)

b) En déduire la résolution dans \mathbb{Z} du système $\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases}$ (1pt)

2°/ Trouver les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient $3m - 2d = 30$.

3°/ Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

- a) Montrer que, pour tout n , $A_{n+3} \equiv A_n [7]$ (1pt)
- b) Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0 [7]$ (1pt)
- c) Les nombres $\alpha = \overline{1110}^2$; $\beta = \overline{1010100}^2$; $\lambda = \overline{1001001000}^2$ sont-ils divisibles par 7. (1pt)

Problème[8 points]

1°/ On considère g , la fonction numérique de courbe représentative (Γ) définie sur \mathbb{R}

$$\text{par } g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}.$$

- a) Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$
- b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- c) Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthonormal du plan, en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2°/ Soit h la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \left| xe^{x-1} \right|$.

- a) Etudier la dérivabilité de h en 0 et en 1.
- b) Donner une méthode permettant d'obtenir la courbe (Γ') représentative de h sur $] -\infty ; 1]$ à l'aide de (Γ) .
- c) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation
- d) Tracer (Γ') ainsi que les demi-tangentes à (Γ') aux points d'abscisses 0 et 1 dans le même repère que (Γ) .

3°/ Soit la suite (U_n) avec n un entier naturel non nul défini pour tout n par

$$U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

(On rappelle que $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \times 3 \times 2 \times 1$ avec $0! = 1$)

- a) Calculer U_1 .
- b) En utilisant l'intégration par parties, exprimer U_n en fonction de U_{n-1} pour

$n \geq 1$. En déduire que $U_n - e = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{k!}\right)$ pour $n \geq 1$.