BAC 2013

SÉRIES : ***SET- MTI - MTGC- TSE-STI***

Exercice 1 .... (6 points)

I-/ 1°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$. ***(1pt)***

2°/ a) Trouvez le reste de la division euclidienne de 111 par7 et de 10^n par7 suivant les valeurs de l'entier naturel n ***(0,5pt)***

b) Soit l'entier naturel N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.

– Montrez que N peut s'écrire en fonction de 111. **(0,5pt)**

– Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ? ***(1pt)***

II-/ Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit T_α l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ telles que $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

où α est un paramètre réel.

1°/ Montrez que, pour tout α, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera. ***(1pt)***

2°/ Montrez qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport. ***(1pt)***

3°/ Montrez qu'il existe 2 valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. Vérifiez que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les note R et R^{-1}. ***(1pt)***

Exercice 2 .... (4points)

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par : $q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.

1°/ Etablir le tableau de variation de q. ***(1pt)***

2°/ On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre 2 valeurs q_m et q_M.

SVP ☞ 🕮

q_m = 1,2 mg est le seuil d'efficacité et q_M = 2,6 mg est le seuil de toxicité.
Déduire du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique. ***(1pt)***

3°/ On pose $q_0 = 10$

a) Tracez soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix. ***(1pt)***

b) Déterminez graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace. ***(1pt)***

Problème -- (10 points)

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A-// Etude de f_1

1°/ Déterminez $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$ Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_1)$? ***(1pt)***

2°/ Étudiez le sens de variation de f_1 et donnez le tableau de variation de f_1. ***(1pt)***

3°/ Donnez une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}_1)$. ***(0,5pt)***

4°/Déterminez $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_2)$? ***(1pt)***

5°/ Calculez $f'_2(x)$ et donnez le tableau de variations de f_2. ***(1pt)***

B-// 1°/ Étudiez le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ ***(1pt)***

2°/ Tracez $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère orthogonal. ***(1,5pt)***

C-// m étant un entier naturel non nul, on pose $I_m = \int_1^e f_m(x)dx$.

1°/ On pose $F(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. Calculez $F'(x)$. En déduire I_1. ***(1pt)***

2°/ En utilisant une intégration par parties, montrez que $I_{m+1} = -\dfrac{1}{e} + (m+1)\, I_m$ ***(1pt)***

3°/ Calculez I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. ***(1pt)***