SÉRIES : ***T.SE – STI***

Exercice 1 -- (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère les points M_n d'affixe Z_n = $(\frac{1}{2}i)^n(1+i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1°/ Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n.
2°/ Donne Z_0, Z_1 , Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et trigonométrique.
3°/ Place les points M_0, M_1 , M_2, M_3 et M_4 (unité 4cm).
4°/ Détermine la distance OM_n en fonction de n

5°/ a) Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$).

Détermine Ln en fonction de n puis la limite de Ln quand n tend vers +∞.

6°/ Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n.
7°/ Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont ils alignés ?

Exercice 2 .... (5 points)

I/ Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : {(A ;1),(B ;m),(C ;2m)}.

Pour tout point M du plan on note $\vec{V_m} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
1°/ Montre que G1 est le milieu du segment [CI].
2°/ Montre que les points G1, J et C sont alignés.

3°/ Montre que pour tout point M, $\vec{V_m} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

4°/ Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$

5°/ Montre que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle.

II/ Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère

l'application affine f définie par: $\begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y'=\frac{1}{5}((4x+3y-2) \end{cases}$

1°/ Démontre que *f* est une isométrie.
2°/ Trouve l'ensemble des points invariants par f.
3°/ Caractérise géométriquement l'application f.

Problème -- **(10 points)**

A//. Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(x) = $xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x$.

On appelle (C) la courbe représentative de *f*.

1°/a) Calcule la fonction dérivée de *f*.

b) Dresse le tableau de variation de *f* **'** sur [0 ; +∞[

c) Dresse le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

d) Montre que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

e) Construis (C) et (D) sur un même graphique.

2°/a)Etablis que l'équation *f*(x) = 0 admet sur [0 ; +∞ [une solution et une seule notée α.

b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B//. Soit la fonction g définie sur l'intervalle J = [1 ; +∞[par g(x) = $xe^{-2x}+e^{-2x}+1$.

1°/ Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in$ J, g(x)∈ J.

2°/ Montre que pour tout x∈ J, on a $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

En déduis que pour tout x∈ J, on a $|g(x)-\alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$.

3°/ Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par $U_n = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.

a) Montre que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|$.

b) En déduis que pour tout entier n positif ou nul, on a $|U_n-\alpha| \leq (\frac{3}{e^2})^n$.

c) Détermine la limite de la suite (U_n).

d) détermine un entier p pour lequel on est sur d'avoir $|U_p-\alpha| \leq (10^{-3}$.

Calcule U_p à 10^{-3}