Exercice 1 : ....(6 Points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (unité grahique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$$

. Partie A:

1. Montre que −i est solution de (E).
2. Détermine les nombres réels a, b, c tels que;
$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$
3. Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B:

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives 4+i ; 4−i ; −i
1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que z'=iz−2i+2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r. Calcule l'affixe s de S.
3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle C dont on déterminera le centre et le rayon. Trace C.
4. Á tout point M d'affixe z≠2, on associe le point M' d'affixe : z'=iz+10 −2i z−2.
a. Détermine les affixes des points A', B', C'associés respectivement aux points A, B et C.
b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle C' de centre P, d'affixe i. Détermine son rayon et trace C'.
c. Pour tout nombre complexe z≠2, exprime $\left|z'-i\right|$ en fonction de z.
d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle C. Démontre que $\left|z'-1\right|=2\sqrt{5}$.
e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle C.

Exercice 2 : .... (4 points)

I. On considère l'équation (E) : 8x+5y=1, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
1. a. Donne une solution particulière de l'équation (E).
b. Résous l'équation (E).
2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$

a. Montre que le couple (a , −b) est solution de (E).
b. Quel est le reste, dans la division de N par 40?
3. a. Résous l'équation 8x+5y =100, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
b. Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. 1
Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe?

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y'-2y=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

   Montre que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2. En déduis toutes les solutions de (E).

Problème : ....(10 points)

I. On définit la fonction g sur l'intervalle] 1 ; +∞[par : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$ A. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

B. Calcule g'(x) pour tout x appartenant à l'intervalle] 1 ; +∞[.

C. Résous l'inéquation : $1-\ln(x-1)$>0, d'inconnue x appartenant à l'intervalle] 1 ; +∞[.

D. Étudie le sens de variation de g sur l'intervalle] 1 ; +∞[.

E. Montre que l'équation g (x) =0 une solution unique notée α , dans l'intervalle [e+1 ; e^3+1] puis étudie le signe de g(x) sur l'intervalle] 1 ; +∞[.

II. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; +∞[par φ (x) = $\frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

A. Détermine $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et prouve que $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=0$.

B. Calcule φ ' (x) et montre que φ '(x) est du signe de g(x^2) sur l'intervalle] 1 ; +∞[.

C. Montre que φ est croissante sur l'intervalle] 1;$\sqrt{\alpha}$] et décroissant sur [$\sqrt{\alpha}$; +∞[.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1. Vérifie que, pour tout x appartenant à l''intervalle]0 ; +∞[, on a $f(x)=\varphi(e^x)$.

2. En déduis :

a. la limite de f (x) lorsque x tend vers 0;

b. la limite de f (x) lorsque x tend vers +∞;

c. le sens de variation de f sur l'intervalle et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montre que, pour tout x de l'intervalle]0 ; +∞[$f(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4. Réproduis et compléte le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.