BAC **2006**

SERIES: SET- TSE

EXERCICE 1 : ……(4,5 points)

1-/ Calculer les intégrales suivantes :

a-/ $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$ (On pourra mettre $\frac{x^2-1}{2x-1}$ sous la forme ax + b + $\frac{c}{2x-1}$ où a ; b ; et c sont trois réels que l'on déterminera) (0,5pt)

b-/ $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+x}\ dx$ (On pourra utiliser le changement de variable u = x+1) (0,5 pt)

2-/ a-/ Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers (0,5 pt)

b-/ Quel est le PGCD de 450 et de 320. (0,5 pt)

c-/ Une pièce rectangulaire a pour dimension 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ? (1pt).

3-/ Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on désigne par $(\mathcal{H})$ l'ellipse d'équation : $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.
Donner l'équation réduite de $(\mathcal{H})$ et préciser son centre, ses sommets et ses foyers.(1,5 pt).

EXERCICE 2 :…….(4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

(F) : $z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$.

a-/ Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de **(F)** alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi une solution de **(F)**). (0,5pt)

b-/ Vérifier que le complexe z_0 =1 + i est une solution de l'équation **(F)**.
En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.(1 pt)

c-/ Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation **(F)**. (1 pt)

d-/ Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm). (0,5 pt).

e-/ Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm2 l'aire de sa surface. (1 pt)

<u>Problème</u> :…….. (11,5 points)

<u>Les parties I et II du problème sont indépendantes</u>

<u>Partie I</u>

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ direct. f et g sont les applications affines de P qui associent à tout point $M(x\,;y)$ le point $M'(x'\,;y')$ telles que $f : \begin{cases} x' = 2x+1 \\ y' = 2y+1 \end{cases}$ *et* $g : \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$

1-/ Pour chacune des applications f et g :

a-/ Déterminer l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijectives. (1pt)

b-/ Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles (1pt).

2-/ Déterminer analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation : $y = x$. (0,5pt)

<u>Partie II</u>

A-/ Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie pour tout x ≠1 par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$$

On appelle (**Γ**) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on ne demande pas de représenter (**Γ**)).

1-/ a-/ Etudier les limites de f en + ∞ et en 1. Interpréter graphiquement ces résultats.(1pt)

b-/ Vérifier que pour x ≠1,f(x) peut s'écrire : $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$.

En déduire la limite de f(x) lorsque x tend vers – ∞. (0,75pt)

2-/ a-/ Montrer que $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$. (0,5pt)

b-/ Etudier les variations de f. (0,5pt)

c-/ Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur]- ∞ ; 1[. (0,5pt)

B-/ On considère l'équation différentielle (E) : y'' + 2y' + y = 0, où y est une fonction deux fois dérivable sur ℝ.

1-/ Résoudre (E) . (0,5pt)

2-/ On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A(0 ;$\frac{1}{2}$).

a-/ Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme $(ax+\frac{1}{2})e^{-x}$.

On note $h_a(x)=(ax+\frac{1}{2})e^{-x}$ où a est un réel. (0,5pt)

b-/ Etudier le sens de variation de h_a selon les valeurs de a et montrer que pour tout réel a ≠0, h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a. (1,25pt)

c-/ On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de h_a et S_a le point de $\mathcal{C}_a$ correspondant à l'extremum de h_a ; vérifier que pour tout réel a ≠0, S_a est un point de la courbe (**Γ**) de la partie **A-/** (0,5pt).

3-/ Construire dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 4cm) les courbes $\mathcal{C}_a$ pour les valeurs suivantes de a : $\frac{1}{4};-2;\ 0;\ 1\ et\ \ 2$. (2pts)

4-/ Soit λ un réel supérieur à –2 ; on appelle $\mathcal{D}_\lambda$ l'ensemble des points M du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x=\lambda$.

a-/ Exprimer $I=\int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)dt$ en fonction de λ; on pourra utiliser une intégration par parties
ou se servir de l'équation différentielle (E). (0,5pt)

b-/ Soit A (λ) la mesure de l'aire de $\mathcal{D}_\lambda$; quelle est la limite de A (λ) quand λ tend vers +∞. (0,5pt).

EXERCICE 1 : ……(5 points)

1-/ Calculer les intégrales suivantes :

a-/ $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$ (On pourra mettre $\frac{x^2-1}{2x-1}$ sous la forme ax + b + $\frac{c}{2x-1}$ où a ; b ; et c sont trois réels que l'on déterminera) (0,5pt)

b-/ $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+x}\ dx$ (On pourra utiliser le changement de variable u = x+1) (0,5 pt)

2-/ a-/ Résoudre dans l'équation : 23x – 17y = 6. (0,5 pt)

b-/ Déduire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2 et dans celle de A par 17, le reste soit 8. (1 pt)

3-/ $\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. On considère l'application affine f définie analytiquement par : $f : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a-/ Vérifier que *f* est bijective. (0,5pt)

b-/ Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*. (0,5pt)

c-/ *f* est-elle une isométrie ? Justifier votre réponse. (1pt).

EXERCICE 2 :…….(4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

(F) : $z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$.

a-/ Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de **(F)** alors il en est de même pour son conjugué $\overline{Z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{Z_0}$ est aussi une solution de **(F)**). (0,5pt)

b-/ Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation **(F)**. En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.(1 pt)

c-/ Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation **(F)**. (1 pt)

d-/ Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm). (0,5 pt).

e-/ Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm2 l'aire de sa surface. (1 pt)

Problème :…….. (11 points)

Partie A

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = \ln(-1+\sqrt{1+x})$$

1-/ Calculer les limites de f en 0 et en +∞. (0,5pt)

2-/ Etudier les variations de f sur]0 ; +∞[. (1pt)

3-/ Soit (𝒞) la courbe représentant les variations de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \ \overrightarrow{e_2})$ et A le point de (𝒞) d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de (𝒞) d'abscisse $\frac{5}{4}$; P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O;\overrightarrow{e_1})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(O;\overrightarrow{e_2})$.

Déterminer les coordonnées des points B ; P et H.

Placer les points A, B, et H puis tracer la courbe (𝒞) dans $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \ \overrightarrow{e_2})$. (2pts)

Partie B

Soit **r** la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M d'affixe z, la rotation **r** associe le point M' d'affixe z'.

1-/ a-/ Exprimer z' en fonction de z. (1pt)

On note z = x + iy et z ' = x ' + iy ' ; (x ; y ; x ' ;y ')∈$\mathbb{R}^4$. Exprimer x ' et y ' en fonction de x et y puis x et y en fonction de x' et y'. (1pt)

b-/ Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation **r**. (1pt)

2-/ Soit g la fonction définie sur ℝ par : g(x) = $e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) la courbe représentant les variations de g dans le repère $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \ \overrightarrow{e_2})$.

a-/ Montrer que si M ∈ (𝒞), son image M' par **r** appartient à (Γ). (1pt)

b-/ Tracer sur le graphique précédent la courbe (Γ) et les points A' ; B' et P'. (1pt)

Partie C

1-/ Calculer $\int_0^{2\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale. (1pt)

2-/ a-/ Déterminer en unité d'aire (u.a), l'aire $\mathcal{a}$ du domaine plan limité par [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe (𝒞) d'extrémités B et A. (1pt)

b-/ Soit $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(-1+\sqrt{1+x}\right)dx$. Trouver une relation entre $\mathcal{a}$ et **I** puis en déduire la valeur de l'intégrale **I**. (0,5pt).