

EXERCICE 1 [4 points]

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on donne le point

$A(12 ; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{u})$ et C un point de $(O ; \vec{v})$ tels que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°/ Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation : (E) : $2x + 3y = 78$ (0,5pt)

2°/ On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a°/ Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs. (1pt)

b°/ A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E). (0,5pt)

c°/ Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x ; y) = (12 + 3k ; 18 - 2k)$ où k est un entier relatif. (1pt)

d°/ Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$? (1pt)

EXERCICE 2 [5 points]

1°/ Le plan \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine f de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \text{ et } \mathbb{C} \text{ l'ensemble des nombres complexes}$$

1°/ a°/ f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse (0,5 pt)

b°/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f . (0,5 pt)

c°/ Quelle est l'image par f de la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x + 1$? (1pt)

2°/ On désigne par $M(x ; y)$ le point d'affixe z et par M' le point d'affixe z' où z et z' sont deux nombres complexes

a°/ Sachant que $f(M) = M'$, exprimer z' en fonction de z . (2pts)

b°/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f (1pt)

PROBLÈME [11 points]

A.// Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2cm

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,5pt)

2°/ Démontrer que (\mathcal{C}) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. (1pt)

3°/ Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f . (1pt)

4°/ a°/ Démontrer que (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point I (1pt)

b°/ Etudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (T) (0,5pt)

5°/ Tracer (\mathcal{C}) et (T) dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (1,5pt)

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{2}}^0 f(x)dx$ (1pt)

b°/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}) , (T) et la droite d'équation

$$x = -\frac{1}{2} \quad (0,5pt)$$

B.// Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$

par $h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$ où f est la fonction définie en A.//

1°/ Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (0,5pt)$$

2°/ Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$ (0,5pt)

3°/ Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1 (0,5pt)

b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$ (0,5pt)

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5 (2 pts)

EXERCICE 1 [4 points]

1°/ Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. (1pt)

2°/ On considère l'équation **(E)** : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs

a°/ Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de **(E)**. (1pt)

b°/ Déterminer l'ensemble des solutions de **(E)** dans \mathbb{R}^2 (1pt)

c°/ Application : Déterminer les points de la droite **D** d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100 (1pt)

Indication : On remarquera que le point $M(x ; y)$ appartient à la droite **D** si et seulement si le couple $(x ; -y)$ vérifie l'équation **(E)**

EXERCICE 2 [5 points]

1°/ On veut déterminer trois nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 ; les modules de ces complexes forment une suite géométrique de raison $q = 2$ et leurs arguments une suite arithmétique de raison $r = \frac{2\pi}{3}$.

Déterminer ces trois nombres sachant que leur produit est $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$ et l'argument de Z_1 appartient à $]0 ; \frac{\pi}{2}[$. On donnera les résultats sous forme trigonométrique. (2pts)

2°/ Soit f une fonction numérique à variable réelle x dérivable sur \mathbb{R} de fonction dérivée f' .

a°/ x_0 étant un réel donné, la fonction qui à tout x réel associe $f(x_0)$ est elle dérivable sur \mathbb{R} ? Même question pour la fonction qui à x associe $f(x^2)$ (1pt)

b°/ Soit F une primitive de f . Exprimer les primitives des fonctions définies par :

$$f_1(x) = f(2x) ; \quad f_2(x) = x f(x^2) ; \quad f_3(x) = f(x) \cdot F(x) ; \quad f_4(x) = f(x) + f(x_0) ;$$

$$f_5(x) = x f(x^2) \cdot (F(x^2))^n \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

PROBLÈME [11 points]

A.// Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2cm

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,5pt)

2°/ Démontrer que (\mathcal{C}) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. (1pt)

3°/ Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f . (1pt)

4°/ a°/ Démontrer que (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point I (1pt)

b°/ Etudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (T) (0,5pt)

5°/ Tracer (\mathcal{C}) et (T) dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (1,5pt)

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)dx$ (1pt)

b°/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}) , (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ (0,5pt)

B.// Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}f(\cos x) \text{ où } f \text{ est la fonction définie en A.//}$$

1°/ Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (0,5pt)$$

2°/ Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$ (0,5pt)

3°/ Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1 (0,5pt)

b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$ (0,5pt)

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5 (2 pts)