BAC 2019

Série: TSE-STI **SESSION : Août 2019**

Exercice 1……………………………………………………………………….……. (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique: 5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

On désigne par $\left(C\right)$ le cercle de centre O et de rayon 1.

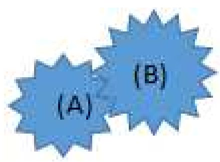
1. Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\left(C\right)$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \left[0;2\pi\right[$ .On considère l'application f qui à tout point M de $\left(C\right)$, associe $f\left(M\right) = MA \times MB$.
   a. Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
   b. Montre l'égalité suivante: $f\left(M\right) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
   c. En déduis l'égalité suivante: $f\left(M\right) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.
3. a. En utilisant 2.c., montre qu'il existe deux points M de $\left(C\right)$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f\left(M\right)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
   b. En utilisant 2.c., montre qu'il existe un seul point M de $\left(C\right)$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f\left(M\right)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Exercice2……………………………………………………………………….……. (4 pts)

I. Une roue d'engrenage (A) a douze dents.

a. Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

b. (A) est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position. Détermine le nombre de dents de la roue (C).



II. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Détermine et construis le point G , barycentre de $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

   b. Détermine et construis le point G', barycentre de $\{(A;1);(B;5);(C;-2)\}$.

2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montre que le barycentre I de $\{(B;2);(C;-1)\}$ appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.

Détermine trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de $\{(A;a);(D;d);(C;c)\}$.

Problème…………………………………………………………………..…..……. (10 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.
2. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

   b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.
   c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$.

   b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4. a. Montre que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α.

   b. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Représente la courbe C sur $[0;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire A , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

1. Montre que $\mathrm{A} = 2e-2+\int_0^1 \left(e^{1-t}\cos t\right)dt$.
2. On pose $I=\int_0^1 \left(e^{1-t}\cos t\right)dt$ et $J=\int_0^1 \left(e^{1-t}\sin t\right)dt$.
   a. Àl'aide de deux intégrations par parties, montre que :
   $I=e-J-\cos 1$ et $J=1-\sin 1$.
   b. En déduis la valeur de I .
3. Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-1-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. a. Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1+\ln 3)$.

2. a. Détermine $\ln\left(f(x)\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Etudie le sens de variation de la fonction H .

   c. Détermine le tableau de variation de H .

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$x \mapsto 1-x+\ln(2+\cos x)$. On ne demande pas de représenter Γ. On appelle Δ la droite d'équation $y=-x+1$.

a. Etudie la position relative de Γ et de Δ.

   b. Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. a. Etablis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Etudie la position relative de Γ et T .

5. Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera des équations.