

EXERCICE I :

1°) a) Montrer en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $324u + 245v = 1$.

b) Dédurre de ce qui précède une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ dans \mathbb{Z}^2 de l'équation (E) : $324u - 245v = 7$ et résoudre dans \mathbb{Z}^2 cette équation.

2°) Montrer que pour toute solution $(x ; y)$ de (E), x est multiple de 7.

3°) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ où n est un entier naturel strictement supérieure à 2.

a) Montrer que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelles valeurs de n , $A(n)$ est-il un entier naturel ?

EXERCICE II :

Soit E_2 le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct

$\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f l'application de E_2 dans E_2 telle que :

$$M(x ; y) \mapsto M'(x' ; y') \text{ et } \begin{cases} x' = x + \sqrt{3}(2 - y) \\ y' = (x - 1)\sqrt{3} + y \end{cases}$$

Soient z et z' les affixes respectives de M et M' .

1°) Montrer que l'on peut déterminer deux nombres complexes uniques a et z_0 tel que : $z' - z_0 = a(z - z_0)$.

2°) En déduire la nature de f .

3°) Quelle est l'image par f du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

T.S.V.P →

EXERCICE III :

On considère l'application f_1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f_1(x) = 1 + xe^x$.

1°) Étudier f_1 et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}_1) dans un repère orthogonal

$\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ où $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

2°) On considère l'application f_2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f_2(x) = 1 - xe^{-x}$.

Trouver une relation simple entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$. En déduire la construction de la courbe (\mathcal{C}_2), représentative de la fonction f_2 dans le repère \mathcal{R} .

EXERCICE IV :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^4 (\ln x)^2$.

1°) Donner son ensemble de définition I.

2°) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$F(x) = \int_1^x t^4 (\ln t)^2 dt = ax^5 (\ln x)^2 - b \int_1^x t^4 \ln t dt$ où a et b sont deux réels à déterminer et x réel strictement supérieur à 0.

3°) En utilisant une intégration par parties calculer $\int_1^x t^4 \ln t dt$.

4°) En déduire une primitive de la fonction f sur I.

Partie I: \mathcal{V}_2 est le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}; \vec{j})$. \mathcal{E}_2 est le plan affine euclidien associé à \mathcal{V}_2 et rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Soit r la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et S_Δ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle Δ engendrée par $\vec{u} = (2 - \sqrt{3})\vec{i} + \vec{j}$. Trouver dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ les matrices de r et de S_Δ .

2°) On considère maintenant la rotation $R\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ associé à r telle que $R(O) = O'$ avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et la symétrie affine orthogonale S_D associé à S_Δ telle que $S_D(O) = O''$ avec $\overrightarrow{OO''} = \vec{i} + (\sqrt{3} - 2)\vec{j}$

a) Préciser le centre A de R et l'axe D de S_D .

b) Quelle est l'équation de la droite D' image de D par R ?

3°) M étant un point quelconque de \mathcal{E}_2 de coordonnées $(x; y)$, on pose $M_1 = R(M)$ et $M_2 = S_D(M)$. Soit alors l'application f de \mathcal{E}_2 dans lui-même qui à M associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que M' soit le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Calculer les coordonnées de M_1 et M_2 et en déduire l'expression analytique de f .

b) Déterminer l'image de \mathcal{E}_2 par f et donner une équation de cette variété affine.

4°) a) Montrer que f admet un point invariant unique I et déterminer l'ensemble des points de \mathcal{E}_2 admettant I comme image par f .

b) Définir l'image de \mathcal{E}_2 par $f \circ f$. Que constate-t-on ? pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie II: Soit \mathcal{E}_2 le plan affine muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. soit f l'application de dans qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est bijective.

2°) Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par f .

3°) Démontrer que quelque soit le point M de \mathcal{E}_2 , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est élément de la droite vectorielle.

4°) Soit M_1 la projection sur Δ dans la direction Δ' . Démontrer qu'il existe un réel k unique tel que $\forall M \in \mathcal{E}_2, \overrightarrow{MM'} = k \overrightarrow{M_1M}$.

5°) Indiquer sur une figure une construction simple de l'image par f .