

SESSION DE JUIN 1980

SÉRIES : S.E.T- M.T.I - M.T.G.C **ÉPREUVE DE** : MATHÉMATIQUES (connaissance)

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

On se place dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j} \right)$. On prendra pour

unité de mesure 2cm pour les figures. Soit $A(1; 1)$ un point du plan.

I/1- Soit α un réel non nul fixé et D la droite d'équation $x = \alpha$. Déterminer l'application f_α

telle que $f_\alpha(O) = A$ et $\forall M \in D, \overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{i}$.

2- Soit f l'application qui à $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ telles que : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une application f_α ($\alpha = 1$). Montrer que f est bijective.

f a-t-elle des points invariants ?

1- a) Vérifier que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs $(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ et $\varphi(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ forment une base du plan vectoriel associé au plan affine ; φ étant l'endomorphisme associé à f .

b) Soit Δ une droite affine du plan affine, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à $f(\Delta)$.

4- Déterminer l'image $f(\Delta)$ de Δ dans les cas suivants :

a) Δ est la droite d'équation $x = k$; montrer que si $M \in \Delta$, $\overrightarrow{Mf(M)}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b) Δ est la droite d'équation : $y = k'$.

c) Δ a pour équation : $y = tx$. Quelles sont les coordonnées de $\Delta \cap f(\Delta)$ en fonction de t ? On note P le point de $\Delta \cap f(\Delta)$. Déterminer l'ensemble (π) des points P quand t décrit \mathbb{R} . Représenter π .

Tracer les droites Δ et $f(\Delta)$ dans les cas où Δ a pour équation : $x = 1$; $y = -1$; $y = -2x$.

5 - On appelle M_0 l'origine du repère. Soit $M_1 = f(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = f(M_{n-1})$; $(x_n; y_n)$, les coordonnées de M_n . Calculer $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; $(x_3; y_3)$. Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1} puis en fonction de n . Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n appartient à la courbe (C) d'équation :

$y = \frac{x(x+1)}{2}$. Tracer (C) et les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

6- a) Montrer que pour toute fonction g continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de primitive G :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x) dx = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1) dx ; \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ étant des réels.}$$

Montrer que l'image d'une courbe (Γ) d'équation $y = h(x)$ est $f(\Gamma)$ d'équation : $x = h(x-1) + x$. Quelle est l'image de la courbe (C) du 5° ?

II- Soit h_0 l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $h_0(x) = e^{-x} - 1$ et Γ sa courbe. Montrer que $f(\Gamma)$ a

pour équation $y = h_1(x) = e^{1-x} - 1 + x$. Étudier h_0 et h_1 , représenter sur une même figure (Γ) et $f(\Gamma)$.

Calculer en fonction de λ , réel supérieur à 1, l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par les droites : $x = 1$ et $x = \lambda$, $f(\Gamma)$ et son asymptote. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.